

Los métodos estadísticos de control en los procesos industriales continuos (1a i 2a part)
de J. Torrens-Ibern. Cuadernos de Estadística
Aplicada e Investigación Operativa,
vol. II, fasc. 3, 1963 i vol. II, fasc. 4, 1963.

LOS METODOS ESTADISTICOS DE CONTROL EN LOS PROCESOS INDUSTRIALES CONTINUOS

por J. Torrens-Ibern
Doctor Ingeniero Industrial

Profesor titular de la Cátedra "J. A. de Artigas Sanz" de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona y de la Escuela de Administración de Empresas

1.- INTRODUCCION.

Hay dos clases de procesos de fabricación que se pueden llamar continuos. De una parte todos los procesos de fabricación no diferenciada, tales como los de las industrias químicas y textiles; de otra parte la fabricación de piezas mecánicas por procedimientos automáticos en una serie tan grande que todo ocurre como si de la máquina saliese un flujo ininterrumpido de piezas.

Los métodos de inspección apropiados a estas dos clases de producción continua serán evidentemente diferentes. En el primer caso la condición predominante del control será la detección inmediata de todo desarreglo del proceso industrial para corregirlo, sin que sea posible mejorar la calidad saliente de la fabricación mediante procedimientos de inspección rectificativa, puesto que la producción es indiferenciada y no hay verdaderamente elementos defectuosos susceptibles de ser sustituidos por elementos buenos equivalentes.

Por el contrario, en la fabricación de elementos mecánicos en gran serie la inspección puede jugar un doble papel: debe servir, primero, para descubrir las modificaciones sufridas por el proceso a fin de corregir sus desarreglos, pero el control permite también separar del flujo de piezas producidas, al menos parcialmente, las que sean malas, mejorando así la calidad que se puede garantizar a la clientela.

Los procedimientos clásicos de control estadístico, es decir, los gráficos de Shewart, no son apropiados completamente para esta clase de fabricaciones. La detección de los desarreglos del proceso resulta poco sensible para producciones continuas; es lógico, pues, que se hayan buscado procedimientos de control más eficaces que los procedimientos clásicos.

Además, desde el punto de vista teórico, los gráficos clásicos sufren de un defecto en cierto modo fundamental. En efecto, la teoría de Shewart se basa en la consideración de que una fabricación inicialmente correcta puede llegar a ser defectuosa; más pronto o más tarde una muestra señalará el desarreglo y permitirá su corrección. Ahora bien, si la producción actual nos informa acerca de la calidad de la producción futura, es lógico considerar que existe cierta interdependencia entre las producciones de los momentos sucesivos y que las muestras sacadas anteriormente contienen cierta información sobre el funcionamiento actual del proceso. En las aplicaciones clásicas de los gráficos de

control no se tiene en cuenta esto, ya que cada muestra se considera in dependiente de las demás y representativa, sólo, de la producción en el momento de su extracción.

Cuando la producción es ininterrumpida el razonamiento anterior gana en firmeza. En las industrias de proceso continuo, tales como la hilatura, la fundición en cubilote, la mayor parte de las fabricaciones de la industria química, las modificaciones de la calidad del producto se efectúan lentamente, pero seguramente; no se puede admitir, pues que las diferentes muestras sean mutuamente independientes o tratarlas como si lo fueran.

Estos inconvenientes teóricos de los gráficos de Shewart se reflejan, naturalmente, en inconvenientes prácticos; en efecto, un desplazamiento de la media en cierto sentido, pequeño pero suficiente para provocar un aumento sensible de desechos, no es apercibido, a veces, antes de mucho tiempo.

La solución para eliminar estas dificultades se ha encontrado con unos sistemas de control que tienen en cuenta esta interdependencia y no pierden inutilmente una parte de la información recogida al considerar sólo cada muestra separada de las demás.

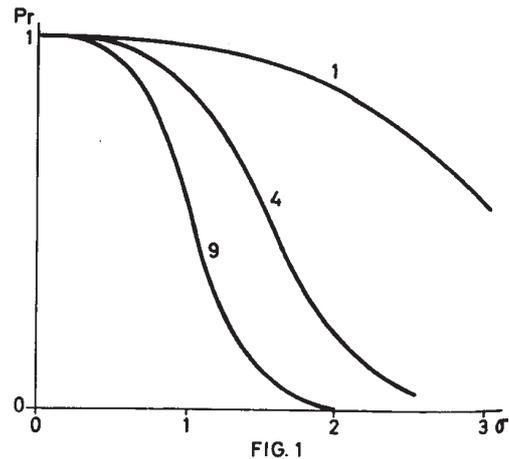
2.- LA EFICACIA DEL CONTROL Y SU REPRESENTACION.

Es bien sabido que cualquier control por muestra, como cualquier prueba estadística, se caracteriza por su curva de eficacia.

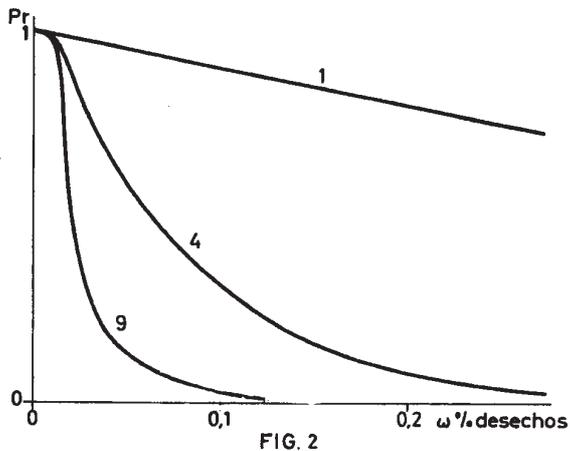
En el caso de los gráficos de control en curso de fabricación, incluso sin ser de uso muy extendido, la curva característica o de eficacia constituye el medio clásico por excelencia para considerar la eficacia del control. El problema, no obstante, es más complicado que en el control en la recepción porque los dos parámetros de la ley de referencia normal, m y σ , pueden desarreglarse independientemente el uno del otro y se necesitará hacer la representación en el espacio, de manera que se tiene una superficie en lugar de una curva característica (1). En general, sin embargo, los autores se limitan a estudiar separadamente las consecuencias de las modificaciones de cada uno de los dos parámetros, respecto a la aceptabilidad de la hipótesis de que el funcionamiento de la máquina es correcto.

Consideremos, sólo, el gráfico de control de las medias. Además, aunque nos informe accesoriamente acerca de los desarreglos de la dispersión del proceso (2), nos limitaremos a tener en cuenta sólo los descentramientos de la fabricación. Se puede trazar la curva característica en función de este descentramiento, medido en desviaciones tipo o bien en función del tanto por ciento de desechos producidos. En el primer caso no se tienen en cuenta las tolerancias de fabricación, mientras que en el segundo esta consideración es esencial.

Las figuras 1 y 2 muestran las curvas características de



los gráficos de control de las medias a partir de muestras de una, 4 y 9 piezas. En la figura 1, las probabilidades de considerar que el reglaje es correcto están dadas en función de los descentramientos medidos en desviaciones tipo; en la figura 2 las abscisas representan el tanto por ciento de desechos fabricados, con la condición de que el intervalo de la tolerancia especificada es superior al intervalo de la tolerancia propia de la máquina ($6,18\sigma$). La comparación de las dos figuras enseña que el segundo procedimiento de representación es más adecuado cuando se trata de conformarse a una especificación y que el control clásico de muestras unitarias es muy poco eficaz.



Sin embargo ninguno de los dos procedimientos utilizados para representar la curva característica expresa claramente lo que se puede esperar de un plan de muestreo aplicado al control de una fabricación. A la probabilidad de decir, con o sin razón, que el reglaje es correcto se prefiere, actualmente, como medida de la eficacia del control otra característica de los planes de muestreo recientemente introducida en estos estudios, la longitud media de la ráfaga (ARL = Average run length). Esta longitud puede ser definida como el número medio de muestras que se sacarán, en las condiciones dadas de funcionamiento de la máquina, hasta encontrar una muestra que provoque su arreglo. Un buen plan de muestreo en curso de fabricación tendrá una ARL muy grande (del orden de 500 a 1000) cuando la fabricación es de buena calidad (AQL), mientras que la ARL será pequeña (del orden de 2 a 3) para una calidad mala (RQL).

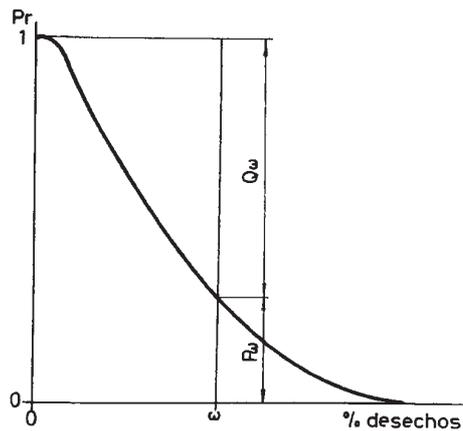
Se demuestra fácilmente que la longitud media de la ráfaga es igual al valor recíproco de la probabilidad de rechazo del reglaje en las condiciones de fabricación consideradas. En efecto, el número medio de muestras que se deben sacar para decidir que el proceso se ha desarreglado cuando el % de desechos es ω (fig.3) será:

$$E[N] = \sum_{N=1}^{\infty} N P_N = \sum_{N=1}^{\infty} N P_{\omega}^{N-1} Q_{\omega} = \frac{Q_{\omega}}{P_{\omega}} \cdot \frac{P_{\omega}}{(1-P_{\omega})^2} = \frac{1}{Q_{\omega}}$$

Para las calidades AQL y RQL las longitudes medias de las ráfagas, L_A y L_R , son, respectivamente:

$$L_A = \frac{1}{\alpha} \qquad L_R = \frac{1}{1-\beta}$$

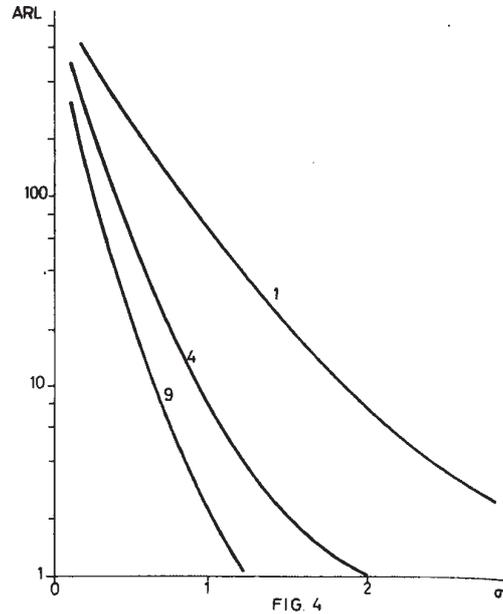
conservando los símbolos α y β para los riesgos de error de decisión, que conciernen, respectivamente, el



productor y el consumidor en el control de recepción.

Una diferencia práctica importante aparece entre las características de los muestreos para el control de las fabricaciones y las de los muestreos para la recepción. Es sabido que los valores $\alpha = 0,05$ y $\beta = 0,10$ son muy adecuados para estos últimos; por el contrario, en el control en curso de fabricación interesará mejor tomar para α valores tales como 0,001 - 0,002 y para β valores de 0,5 (ARL = 2) ó 0,667 (ARL = 3). Es evidente que en este caso el valor de β puede considerarse como despreciable.

Las figuras 4 y 5 dan las curvas ARL de los gráficos de control de las medias para muestras de 1, 4 y 9 piezas, en función del descentrado, expresado, respectivamente, en desviaciones tipo y en % de desechos; la escala de las ordenadas es logarítmica para reducir a una magnitud adecuada estas curvas. La información que proporcionan confirma la de las curvas características clásicas (fig. 1 y 2).

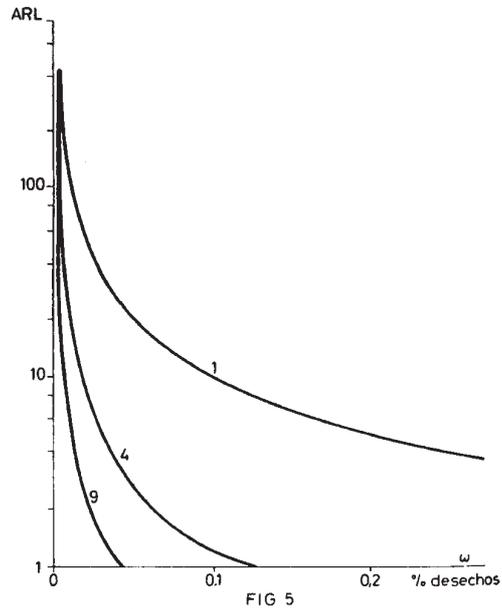


3.- LA INSPECCION DE LAS PRODUCCIONES CONTINUAS NO DIFERENCIADAS.

Para aumentar la eficacia del control de las medias se han propuesto varias soluciones; se basan en la utilización de los resultados de la inspección de los períodos anteriores junto con las últimas observaciones; de esta manera se añade la información que aquéllas poseen a la de los datos más recientes.

Se pueden clasificar así los gráficos de control de las medias que tienen en cuenta las anteriores consideraciones en:

1º. Gráficos de control de medias geométricas móviles. - Se calcula para cada muestra sacada la media ponderada de los resultados de las últimas observaciones y de la media ponderada relativa al período precedente. Las medias calculadas así se colocan en gráficos de control de rectas paralelas cuya situación se puede determinar mediante las fórmulas empleadas para los gráficos de control clásicos, con-



siderando un tamaño ficticio para las muestras tomadas, el cual depende de los coeficientes de ponderación utilizados. Este método tiene el inconveniente de conducir, en su aplicación, a cálculos bastante más complicados que los de los procedimientos clásicos.

2º. Gráficos de control acumulativos de rectas divergentes.— Para cada muestra se determina el valor medio y se suma a los de las muestras anteriores, después de restarle la media teórica de la fabricación; las medias se refieren, pues, a variables centradas. Los resultados se colocan en un gráfico cronológico sin rectas límites de ninguna clase; los límites de control se trazan sobre un papel transparente o forman una plantilla en V, y se aplican sobre el gráfico después de cada observación, apoyándose en el último punto dibujado, y se verifica si algún punto anterior sale fuera de los límites. Frente a la evidente facilidad de cálculo de las sumas acumuladas de las medias considerando centrada la variable, este método tiene el inconveniente de necesitar una plantilla o trazado en forma de V para controlar los desarreglos de la máquina.

3º. Gráficos de control acumulativos de rectas paralelas.— Si en lugar de restar la media teórica a los valores observados para tener la variable centrada se les resta otro valor, convenientemente escogido, m_0 , que llamaremos valor de referencia, las rectas límites no son divergentes, si no paralelas; se pueden, pues, trazar directamente sobre el gráfico, como en los métodos clásicos, sin necesitar ningún papel auxiliar. Este sistema es, evidentemente, el único práctico dentro de la industria. Nos limitaremos a exponerlo, con exclusión de los demás.

3.1.- BASES TEORICAS DE LOS GRAFICOS DE SUMAS ACUMULADAS.

La teoría de los gráficos de control de sumas acumuladas, tanto los de rectas paralelas como de rectas divergentes, se basa en la que desarrollaron hace veinte años Wald y su equipo de la Universidad de Columbia con el nombre de "Sequential Analysis". Basta, pues, consultar los textos que tratan este tema (3) para conocer las bases fundamentales de estos gráficos.

Recordemos solamente que una de las modalidades de aplicación de esta teoría al control en la recepción se refiere al caso en que el carácter verificado es cuantitativo. En este caso se colocan los puntos representativos de las observaciones en un gráfico cuyas ordenadas son precisamente las sumas acumuladas de la variable controlada; en el gráfico se han trazado previamente dos rectas ascendentes paralelas y cuando la línea quebrada representativa de las observaciones corta la recta superior se toma cierta decisión, mientras que si corta la recta inferior se toma la decisión contraria.

Las modificaciones que conviene hacer para emplear este método en el caso del control en curso de fabricación son ínfimas. Lo más importante es la sustitución de un valor único por la media de la muestra. Otra modificación consiste en efectuar un cambio de variables; las rectas ascendentes se transforman en horizontales, de manera que los gráficos de control de sumas acumuladas se presentan como un gráfico de control de medias clásico. La única diferencia estriba en que los puntos, inscritos en el gráfico, no representan los valores medios individuales de cada muestra, sino su suma acumulada.

Para el cálculo de las rectas límites de este gráfico partimos de las condiciones estadísticas del plan de muestreo, caracterizadas por las longitudes medias de las ráfagas (o por los riesgos de error) referentes a la calidad de fabricación aceptable (AQL) y rechazable (RQL),

y de la desviación tipo de la fabricación (o de las medias de las muestras):

Sean m_A y m_R los valores medios de la fabricación cuando se producen calidades aceptables y rechazables, respectivamente, y σ_m la desviación tipo de las medias de las muestras. (En el caso de muestras individuales σ_m coincidirá con la desviación tipo de la fabricación). Llamemos L_A y L_R a las longitudes medias de ráfaga para las mismas calidades; según las fórmulas precedentes se tiene:

$$\alpha = \frac{1}{L_A} \qquad \beta = 1 - \frac{1}{L_R}$$

La aplicación de la teoría de las pruebas secuenciales o progresivas, permite calcular la ordenada de origen h_2 de la recta límite superior:

$$h = h_2 = \frac{\sigma_m^2}{m_R - m_A} \left[1 - \frac{1 - \beta}{\alpha} \right] = \frac{\sigma_m^2}{m_R - m_A} \left[1 - \frac{L_A}{L_R} \right]$$

Es aconsejable tomar los valores $\alpha_1 = 0,001$ y $\alpha_2 = 0,010$ para α , respectivamente para los límites de intervención y de atención, con un valor único para β (0,50 ó 0,667, a voluntad).

Prácticamente convendrá tener esta fórmula para su aplicación directa en función sólo de la desviación tipo, del intervalo entre las calidades aceptable y rechazable y del tamaño de la muestra (que luego veremos cómo determinar). Recordando que

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n} \text{ y poniendo } a = 1 - \frac{L_A}{L_R}, \text{ se tendrá} \qquad h = a \frac{\sigma^2}{n(m_R - m_A)}$$

Los valores de a_1 y a_2 para los límites de intervención y de atención, respectivamente, se hallan resumidos en la tabla siguiente:

β	L_R	a_1	a_2
0,50	2	6,215	3,912
0,667	3	5,808	3,506

No se deben confundir, sin embargo, los valores medios m_A y m_R con los límites de las tolerancias de fabricación. Si se considera, por ejemplo, el límite superior T_2 (fig. 6), éste debe estar situado a una distancia $t_2\sigma$ de m_R , ya que si coincidiesen la mitad de producción sería defectuosa. Partiendo del límite de la tolerancia especificada y del tanto por ciento δ_R , de desechos que deseamos no fabricar se calcula m_R , mientras que el mismo límite y el tanto por ciento, δ_A , que admitimos puedan producirse permite determinar m_A .

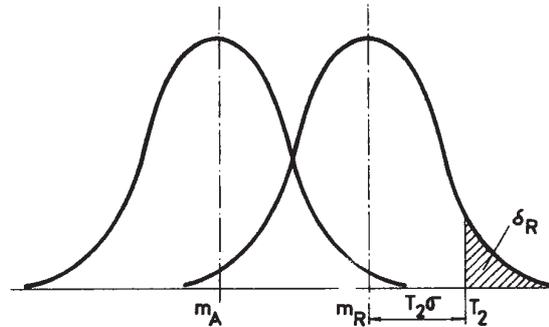


FIG. 6

Si existen dos límites de tolerancia, T_1 y T_2 , inferior y superior, la calidad rechazable estará caracterizada por dos valores m_{RS} y m_{R1} , pero pueden haber uno o dos valores m_A . Nada se opone, en efecto a que se escoja un valor de m_A central entre m_{RS} y m_{R1} , sin tener en cuenta el tanto por ciento δ_A de piezas defectuosas que determinan los límites de tolerancia T_1 y T_2 . Las fórmulas anteriores, continúan siendo aplicables, estando h afectado del signo que corresponda a la diferencia $m_R - m_A$.

Obsérvese la significación diferente de los límites de atención de los gráficos de sumas acumuladas en relación con los de los gráficos clásicos. Los resultados que se inscriben en el gráfico nuevo no son independientes y no es posible considerar como valor de su probabilidad global el producto de las probabilidades de los dos puntos sucesivos del gráfico; el último punto trazado contiene y resume toda la información del proceso y las fluctuaciones del azar le influyen poco porque es el resumen de varios resultados. La acción provocada por un punto situado fuera del límite de atención no será, por consiguiente, la misma que en el control clásico; aquí se deberá continuar la extracción de muestras hasta que el punto salga de los límites de intervención (se arreglará la máquina) o vuelva a estar por debajo de los límites de atención (se toma de nuevo el ritmo normal de la inspección).

3.2.- CONDICIONES PRACTICAS DE SU EMPLEO.

La condición de horizontalidad de las rectas límites se cumplirá si su coeficiente angular es nulo, es decir si:

$$s = \frac{m_R' + m_A'}{2} = 0.$$

Basta, pues, tomar como valor de referencia, m_0 , la media entre m_A y m_R , o sea:

$$m_0 = \frac{m_A + m_R}{2}$$

Entonces se tendrá, evidentemente:

$$m_A' = m_A - m_0 = \frac{m_A - m_R}{2}$$

$$m_R' = m_R - m_0 = \frac{m_R - m_A}{2}$$

y

$$m_A' = -m_R' \quad \text{de donde} \quad s = 0$$

Se calcularán, pues, las sumas acumuladas de las medias después de haberles restado el valor de referencia, m_0 .

Falta determinar el tamaño de la muestra según las condiciones de eficacia apetecidas. Para ello se tendrá en cuenta otra de las características de los planes progresivos, la curva ASN o número medio de extracciones en función de la calidad del lote; no confundir, sin embargo, esta cifra con la longitud media de la ráfaga ARL. Veamos en qué consiste, concretamente, su diferencia.

Supongamos una serie de partidas con la misma proporción de desechos, correspondiente a una cantidad rechazable RQL, sometidos a muestreos progresivos o secuenciales de características bien definidas, entre las cuales β y \bar{n}_{mR} (número medio de extracciones para un lote de calidad RQL). En promedio β lotes serán aceptados y $1 - \beta$ rechazados; por otra parte, en promedio los lotes considerados necesitarán la inspección de \bar{n}_{mR} piezas hasta tomar una de las dos decisiones posibles. Dicho de otra manera, cada muestra completa será de \bar{n}_{mR} en promedio, pero hasta después de haber controlado $L_R = 1/(1 - \beta)$ muestras, también en promedio, no aparecerá que la calidad del lote es rechazable.

Para que cada muestra permita tomar la decisión adecuada, es evidente que deben tener un tamaño de \bar{n}_{mR} piezas. Por lo tanto, se cogará, según las fórmulas utilizadas en las pruebas progresivas:

$$n = \bar{n}_{mR} = 2 \frac{(1 - \beta) \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} - \beta \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{(m_R - m_A)^2} \sigma^2$$

Si nos limitamos a considerar un número reducido de valores para los riesgos de error α y β (por ejemplo $\alpha = 0,001$ y $\beta = 0,50$ y $0,667$, que corresponden a longitudes ARL de 1000 y $2+3$ muestras) para tener una fórmula sencilla que permita determinar el tamaño de las muestras se tendrá:

$$\text{para } \beta = 0,50 \quad n = 5,52 \left[\frac{\sigma}{m_R - m_A} \right]^2$$

$$\text{para } \beta = 0,667 \quad n = 3,33 \left[\frac{\sigma}{m_R - m_A} \right]^2$$

El gráfico de control por sumas acumuladas se dibujará, pues, sobre papel cuadrulado, trazando las líneas límites a las distancias h_1 y h_2 del eje 0. La graduación se efectuará a partir de este eje, positiva por encima y negativa por debajo si existen dos límites de tolerancia especificados.

La situación de los puntos representativos de las muestras vendrá determinada por el valor de las sumas acumuladas de las medias, después de haberles restado m_0 . Cuando se tengan dos límites de tolerancia, y por consiguiente dos valores medios de calidad rechazable, m_{p1} y m_{p2} , se tendrán también dos valores de referencia, m_{01} y m_{02} , con los cuales se compararán las medias de las muestras extraídas. Los valores medios observados comprendidos dentro de su intervalo no provocan la iniciación de ninguna suma acumulativa y sólo sirven, cuando aparecen en una secuencia de muestras graficadas, para disminuir por suma algebraica la acumulada anterior.

El proceso a seguir al sacar las primeras muestras consistirá en comparar, simplemente, el valor de la media con el (o los) de referencia. Si está situado fuera del campo de actuación (o sea dentro del intervalo de los valores de referencia, si hay doble límite) se señala el punto representativo en el eje de ordenada 0. Si, por el contrario, el valor medio obtenido es superior a m_{02} (o inferior a m_{01}) se le resta el valor de referencia y se sitúa la diferencia en el gráfico; a la media de la muestra siguiente se le resta el mismo valor de referencia y la diferencia se suma algebraicamente al valor graficado anterior, continuando en forma idéntica hasta que el punto representativo de las sumas acumuladas salga fuera de la línea límite de intervención, en cuyo caso se actúa como con los gráficos clásicos, o se llega a 0, en cuyo caso o se vuelve a empezar sin tener en cuenta los resultados anteriores.

3.3.- EJEMPLO 1.

En un proceso de hilatura de algodón de número 30, con una desviación tipo 0,6 se desea establecer un control estadístico por sumas acumuladas para darse cuenta, en promedio, a la segunda muestra si cada de una modificación de un número (29 o 31).

Para considerar el problema haciendo intervenir tolerancias de fabricación, éste se plantearía así: Se desea producir hilo de número 30 + 2, con la condición de que se arreglará la máquina cuando se tenga el 4,75% de la fabricación defectuosa (es fácil comprobar que esto corresponde, con la desviación tipo considerada, a un centrado de la producción en los números 29 y 31).

Para un ARL de 2 (o sea $\beta = 0,5$) se tiene un tamaño de las muestras igual a:

$$n = 5,52 \left(\frac{0,6}{1} \right)^2 \approx 2$$

Los límites de intervención y de atención serán, respectivamente:

$$h_1 = 6,215 \frac{0,6^2}{2 \times 1} = 1,119$$

$$h_a = 3,912 \frac{0,6^2}{2 \times 1} = 0,704$$

que se situarán sobre papel cuadrulado, trazando dos pares de rectas paralelas por encima y por debajo del eje de abscisas.

Los valores de referencia serán:

$$m_{oi} = \frac{30 + 29}{2} = 29,5 \quad \text{y} \quad m_{os} = \frac{30 + 31}{2} = 30,5$$

Al iniciarse el control, si la media de la primera muestra o de las primeras está comprendida entre estos dos valores no se hace nada, o bien se colocan los puntos que las representan en el eje de valor 0; cuando aparezca una media fuera del intervalo se le resta el valor de referencia más próximo y se traza en el gráfico el punto representativo del resultado, teniendo en cuenta su signo. Las medias de las muestras sacadas a continuación se suman algebraicamente a las anteriores, después de haberles restado el mismo valor de referencia.

Comparemos los resultados que se obtendrían utilizando estos gráficos de sumas acumuladas con los de los gráficos clásicos.

Tratándose de una fabricación excesivamente precisa se calcularían para el gráfico de control de las medias los límites de intervención siguientes:

$$M_{is} \quad T_2 - 3,09 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sigma = 31,454$$

$$M_{ii} \quad T_1 + 3,09 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sigma = 28,546$$

Los riesgos de error y las longitudes medias de ráfaga serían los siguientes:

Para el AQL (número medio 30) :

$$t_A = \frac{31,454 - 30}{0,6/\sqrt{2}} = 3,44 \quad \alpha = 0,0003 \quad L_A = 3333$$

Para el RQL (número medio 31, o 29) :

$$t_R = \frac{31,454 - 31}{0,6/\sqrt{2}} = 1,07 \quad \beta = 0,858 \quad L_R = 7$$

Por lo tanto, se tendría una protección excesiva en el AQL e insuficiente en el RQL.

Para una mejor comparación de la eficacia de cada uno de los dos métodos convendría considerar la variante primitiva del sistema clásico, en función sólo del valor central de la fabricación, o sea sin tener en cuenta las tolerancias para el cálculo de las líneas de intervención. Entonces éstas serían:

$$M_1 : \quad 30 \pm 3,09 \quad \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 31,311 \\ 28,689 \end{cases}$$

mientras que los riesgos de error y las longitudes medias de ráfaga serían:

Para el AQL (número medio 30) :

$$t_A = \frac{31,311 - 30}{0,6/\sqrt{2}} = 3,09 \quad \alpha = 0,001 \quad L_A = 1000$$

Para el RQL (número medio 31, o 29)

$$t_R = \frac{31,311 - 31}{0,6/\sqrt{2}} = 0,732 \quad = 0,767 \quad L_R = 4,3$$

Las condiciones de eficacia son en este caso algo más próximas a las de los gráficos de sumas acumuladas, pero todavía la protección contra la calidad RQL es menor que con ellos.

Si se aumenta el tamaño de la muestra a 3 unidades los límites de intervención pasarán a ser:

$$M_1 : \quad 30 \pm 3,09 \quad \frac{\sigma}{\sqrt{3}} = \begin{cases} 31,070 \\ 28,930 \end{cases}$$

Los riesgos de error y las longitudes medias de ráfaga valdrían:

Para el AQL (número 30) :

$$t_A = \frac{31,07 - 30}{0,6/\sqrt{3}} = 3,09 \quad \alpha = 0,001 \quad L_A = 1000$$

Para el RQL (número medio 31, o 29) :

$$t_R = \frac{31,07 - 31}{0,6/\sqrt{3}} = 0,21 \quad \beta = 0,593 \quad L_R = 2,4$$

Las condiciones de eficacia de este plan de inspección son muy semejantes a las del gráfico por sumas acumuladas, pero no mejores y con un tamaño de muestra mayor.

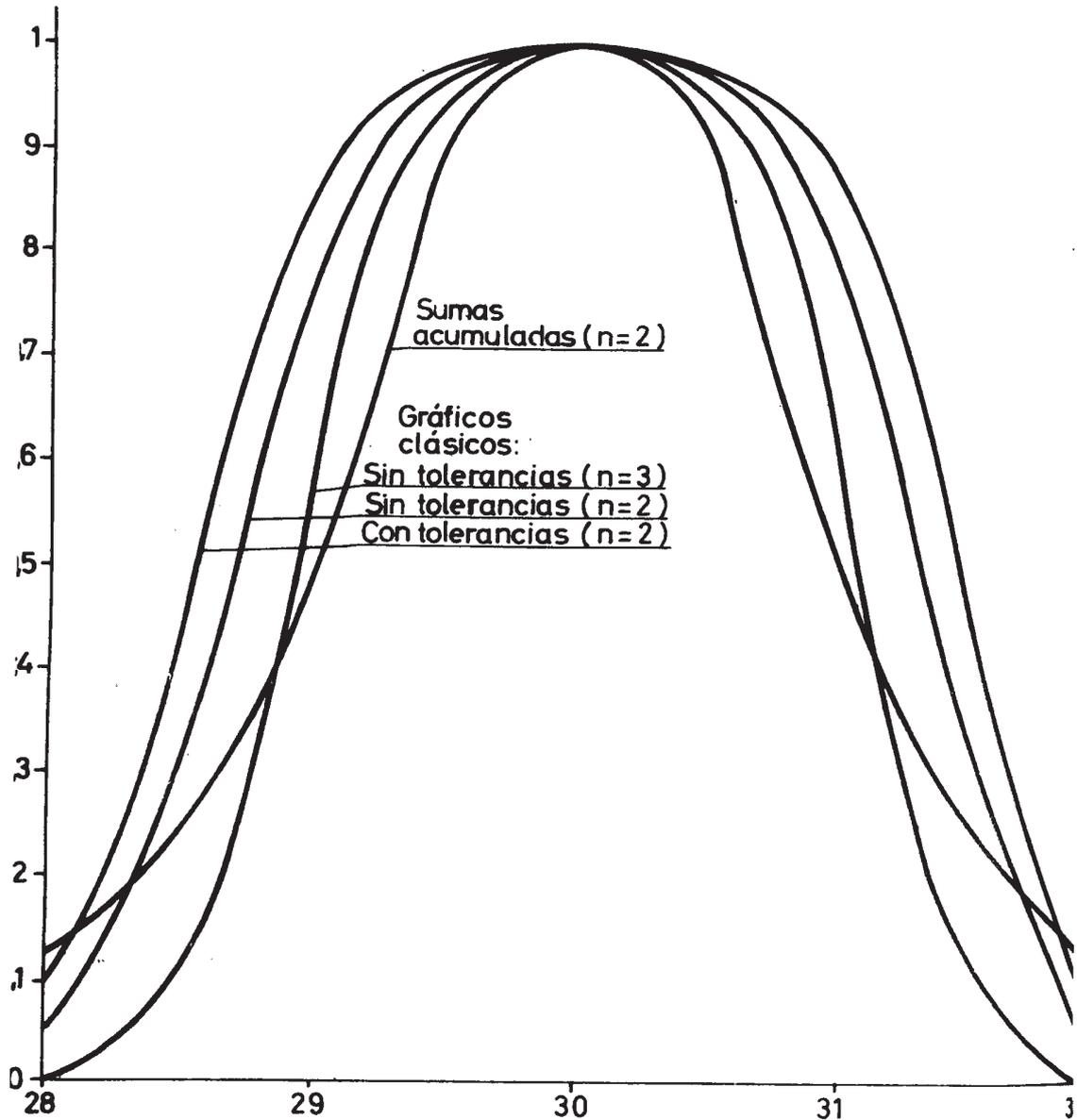


FIG. 7

Comparación de las curvas características de los gráficos de control de sumas acumuladas respecto a las de los gráficos clásicos. (Ejemplo 1)

El trazado de las curvas características y las de las longitudes medias de ráfaga (fig. 7 y 8) permite completar la comparación. En el intervalo comprendido entre las calidades AQL y RQL el método de sumas acumuladas detecta más pronto los desarreglos que los gráficos clásicos de igual tamaño de muestra y es prácticamente equivalente al clásico con el tamaño de muestra inmediatamente superior. Más allá del RQL el sistema de control acumulativo resulta menos eficaz, pero esta desventaja es en realidad menos importante de lo que aparenta, como se demuestra si se toma como criterio de eficacia la longitud media de ráfaga. Entonces, en efecto, resulta evidente que en el peor de los casos para un descentrado de dos números (32) se tiene una ARL de 1,4 contra 1 ÷ 1,2 obtenido con los métodos clásicos, diferencia prácticamente despreciable.

4.- EXTENSION DE LOS GRAFICOS DE SUMAS ACUMULADAS AL CONTROL CUALITATIVO

Hasta ahora hemos considerado el caso de una variable continua y la hemos supuesto distribuida según una ley de probabilidad normal. A veces, sin embargo, la información más directamente obtenida se expresa en forma de números enteros (número de piezas defectuosas dentro de la muestra, número de defectos observados por unidad de longitud o de tiempo, etc.), los cuales, evidentemente, no se distribuyen según aquella ley.

También en este caso es posible recurrir a los gráficos de control por sumas acumuladas, aprovechando la mayor eficacia de éstos en relación con los gráficos clásicos.

Las bases de su realización continúan siendo las del "Análisis secuencial" o muestreo progresivo de Wald: Como es sabido los cálculos conducentes al trazado de las dos rectas que delimitan las decisiones a tomar en el muestreo progresivo de recepción son diferentes según que la ley de distribución de la población original pueda asimilarse a la binomial (Bernoulli) o a la de Poisson. La primera conviene para el control de piezas defectuosas encontradas en las muestras de un tamaño dado; la segunda conviene para el control de los defectos que se manifiestan dentro de una unidad cualquiera (de longitud, de tiempo, de peso, etc.)

En los gráficos que se utilicen para este control será conveniente, también, transformar las rectas inclinadas ascendentes, habituales en el muestreo progresivo, en rectas horizontales, de utilización más fácil. Ello no representa ninguna dificultad aunque, en este caso, no se obtenga tal resultado mediante un cambio de variable sino disminuyendo el valor de la pendiente a cada sumando que se añade.

Como en el control de las medias otra modificación que es necesario prever consiste en la extracción de muestras no individuales. Esto transforma, en realidad, el muestreo progresivo propiamente dicho en muestreo en racimo. Siguiendo el criterio anteriormente expuesto se cogirá, pues, como tamaño de muestra el número medio de extracciones correspondiente al caso de que la partida tenga la calidad RQL.

4.1.- GRAFICO DE SUMAS ACUMULADAS PARA NUMERO DE PIEZAS DEFECTUOSAS.

En este caso se utilizarán las fórmulas del muestro progresivo por atributos, que son las más conocidas y que se encuentran en todos los tratados de Estadística aplicada al control industrial (4):

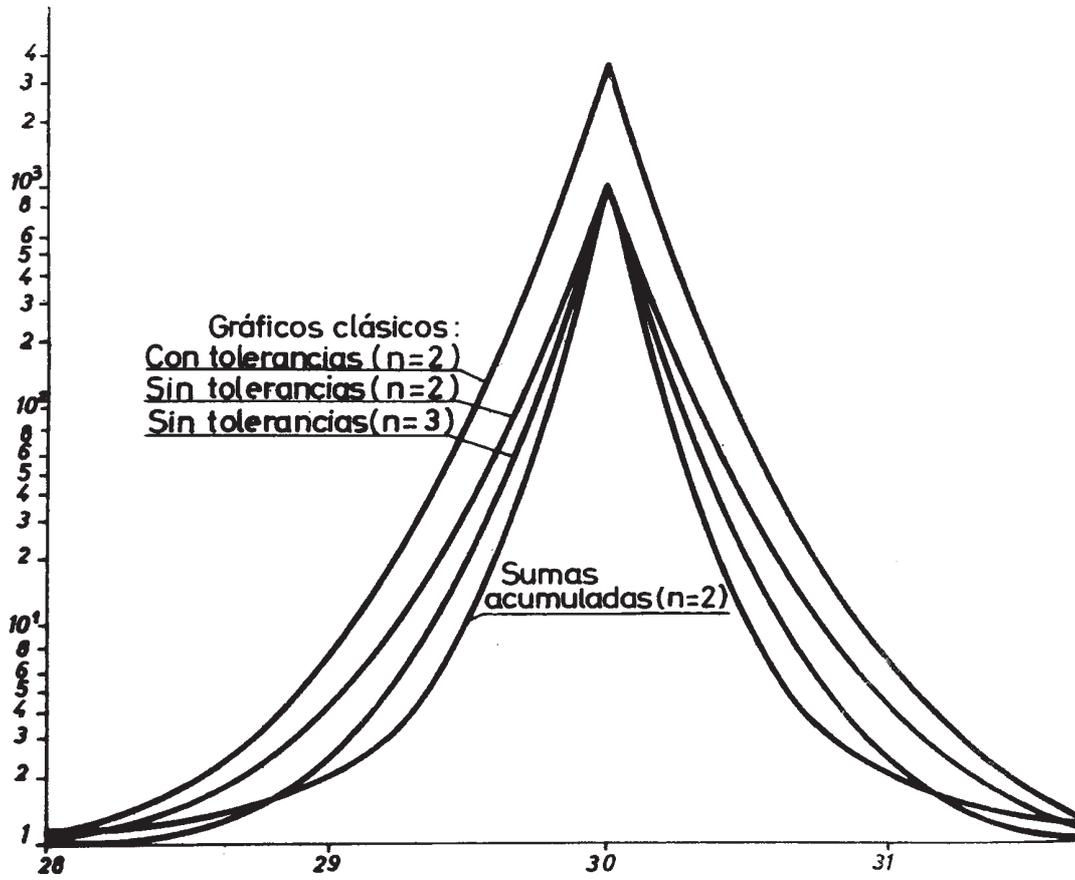


FIG. 8

Comparación de las curvas ARL de los gráficos de control de sumas acumuladas respecto a los de los gráficos clásicos. (Ejemplo 1)

$$h = h_2 = \frac{\log[(1 - \beta)/\alpha]}{\log(\omega_R/\omega_A) + \log[(1 - \omega_A)/(1 - \omega_R)]}$$

$$s = \frac{\log[(1 - \omega_A)/(1 - \omega_R)]}{\log(\omega_R/\omega_A) + \log[(1 - \omega_A)/(1 - \omega_R)]}$$

$$\bar{n}_{\omega_R} = \frac{(1 - \beta)h_2 - \beta h_1}{\omega_R - s}$$

habiéndose calculado también previamente, sólo para su aplicación en esta última fórmula:

$$h_1 = \frac{\log[(1 - \alpha)/\beta]}{\log[(\omega_R/\omega_A)] + \log[(1 - \omega_A)/(1 - \omega_R)]}$$

Por consiguiente, después de determinar el tamaño de las muestras que constituirán los racimos, haciendo:

$$n = \bar{n}_{\omega_R}$$

se trazará una recta horizontal a la distancia h del eje de abscisas. El punto representativo de cada extracción se situará en el gráfico en una ordenada obtenida por suma algebraica acumulada de los sucesivos valores:

$$n_d - n \cdot s$$

donde n_d es el número de piezas defectuosas encontradas en la última muestra, de n piezas, extraída.

Obsérvese que los valores negativos obtenidos después del cálculo de cualquier suma acumulada no tienen significación alguna desde el punto de vista de la actuación para el arreglo de la máquina, por lo que no es nunca necesario descender por debajo de la línea de ordenada 0. El trazado de puntos significativos en el gráfico se iniciará, pues, sólo cuando $n_d > n \cdot s$; entretanto convendrá situar los puntos representativos de las muestras en el eje de abscisas (ordenada 0), para que quede constancia de que se ha sacado la muestra.

Se tendrá, en este caso, una simplificación notable del gráfico si se toma para éste una escala tal que tenga como unidad un número de divisiones (milímetros) igual a $1/s$. Sea m el número entero más próximo a $1/s$; si se dibuja el gráfico sobre papel milimetrado se puede coger un milímetro negativo cada vez que sale una pieza buena y $m-1$ milímetros positivos por cada pieza defectuosa. Las líneas límites se situarán a distancias del eje de abscisas iguales a:

$$\text{Línea de atención} \quad H_a = m \cdot h_a$$

$$\text{Línea de intervención} \quad H_i = m \cdot h_i$$

Como que el valor de s es muy pequeño, el hecho de redondear su recíproco m hasta el entero más próximo no constituirá, en general, un defecto de precisión inadmisibles.

4.2.-GRAFICO DE SUMAS ACUMULADAS PARA NUMERO DE DEFECTOS POR UNIDAD.

En este caso es evidente que no existe límite teórico para el número de defectos que puede aparecer, contrariamente al caso anterior de número de piezas defectuosas, el cual no puede ser nunca superior al tamaño de la muestra. Por consiguiente, el modelo probabilístico aquí más adecuado no será el binomial sino el poissoniano.

Las fórmulas que se aplican en el muestro progresivo de recepción son mucho menos divulgadas que las anteriores. Llamando d_A y d_R a los números de defectos por unidad correspondientes respectivamente a las calidades AQL y RQL, se tiene (5):

$$h = h_2 = \frac{1 \left[(1 - \beta) / \alpha \right]}{1 (d_R/d_A)}$$

$$s = \frac{d_R - d_A}{1 (d_R/d_A)}$$

$$\frac{y}{n_{d_R}} = \frac{(1 - \beta)h_2 - \beta h_1}{d_R - s}$$

donde:

$$h_1 = \frac{1 \left[(1 - \alpha) / \beta \right]}{1 (d_R/d_A)}$$

El modo de operar es semejante al anterior, con la diferencia de que s no tiene un valor muy pequeño, ya que siempre estará comprendido entre d_A y d_R , dos valores enteros más o menos grandes. Después de haber calculado h , h_1 y s se puede determinar el tamaño de las muestras n , que debe coincidir con n_{d_R} . Se traza, entonces la recta límite horizontal a una distancia h del eje de abscisas.

Los puntos representativos de las muestras se obtendrán adicionando para cada una de ellas los valores

$$d - n \cdot s$$

donde d es el número de defectos encontrados en la muestra y n el número de unidades examinadas en cada una de ellas, o sea su tamaño. Como en los casos anteriores no es necesario empezar a situar puntos en el gráfico hasta que $d > ns$; entretanto basta con colocar los puntos en el eje mismo de abscisas para que quede constancia de que la muestra ha sido sacada y no obligada a acción alguna.

4.2.1.- EJEMPLO 2.

En un proceso de arrollado de hilo de rayón se considera que si ocurren 2 roturas por Kg. la calidad es aceptable mientras que si se producen 4 roturas por Kg. esto significa que las condiciones del hilo han empeorado.

Para hacer el estudio de manera que pida un tiempo consecutivo de control mínimo partiremos de tiempos elementales cortos, por ejemplo de 6 minutos, para los cuales se calculará el número de roturas que les corresponden, habida cuenta del número de púas en funcionamiento y la cantidad de hilo producida por hora. Considerando 100 púas los números de roturas por intervalo de 6 minutos resultan ser 2 con la calidad AQL y 4 con la RQL. Deseamos, pues, que cuando el hilo es adecuado (2 roturas en promedio por 6 minutos en las 100 púas) se hagan ráfagas de unas 1000 muestras sin interrupción, y cuando el hilo es más frágil (4 roturas por 6 minutos) con ráfagas de sólo 2 muestras en promedio nos demos cuenta de que el material ha empeorado. Por consiguiente tendremos:

$$\begin{array}{lll} L_A = 1000 & \alpha = 0,001 & d_A = 2 \\ L_R = 2 & \beta = 0,50 & d_R = 4 \end{array}$$

Con estos datos calculamos:

$$h_1 = \frac{1 (0,5/0,001)}{1 (4/2)} = 8,95 \quad ; \quad h_1 = \frac{1 (0,999/0,5)}{1 (4/2)} \approx 1$$

$$s = \frac{4 - 2}{1 (4/2)} = 2,89$$

$$\bar{n}_{dR} = \frac{0,5 \times 8,95 - 0,5 \times 1}{4 - 2,89} = 3,58$$

Este último resultado nos indica que para tener información suficiente tal, que permita tomar en promedio una decisión por cada observación (con el riesgo de error $\beta = 0,5$ siendo malo el material) con vendrá que el intervalo sea de $3,58 \times 6 = 21,5 \approx 20$ minutos. Así, pues, periódicamente, se contarán durante 20 minutos consecutivos el número de roturas acaecido, de él se restará $(20/6) \times 2,89 = 9,6$ y se irán acumulando las sumas hasta que el total sobrepase positivamente la línea horizontal trazada a la altura 8,95.

La línea de atención (con la cual el riesgo de error α es de 0,01) se situaría a:

$$h_a = \frac{1 (0,5/0,010)}{1 (4/2)} = 5,62$$

Cuando las sumas acumuladas sobrepasen este valor o mejor dicho la recta trazada a esta distancia del eje de abscisas, se irán contando las roturas producidas durante intervalos sucesivos de 20 minutos hasta que aplicándoles las normas indicadas se llegue al límite de intervención o se vuelva a estar por debajo del límite de atención.

N O T A S.

- (1) A.J.DUNCAN, "Quality Control and Industrial Statistics".-
Rev.Edit. 1959, pág.396.
- (2) R.CAVE, "L'efficacité des méthodes classiques de contrôle
statistique", Revue de Statistique Appliquée, Vol.I,1953,
nº 3-4,pág.36.
- (3) A. WALD, "Sequential Analysis", 1.947
Statistical Research Group of Columbia University, "Sequential
Analysis of Statistical Data", 1.947.
- (4) Por ejemplo: J.MOTHEs, "Estadística Aplicada a la Ingeniería",
1960, pág.155.
- (5) Statistical Research Group of Columbia University, "Sequen-
tial Analysis of Statistical Data",1947,pág. 7.14 y 7.15

Texto de la conferencia pronunciada en el Seminario de Estadística Aplicada e Investigación Operativa (Cátedra "J.A. de Artigas Sanz"), bajo el patrocinio del Instituto de Economía de la Empresa, en el Aula Magna de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona el día 15 de Noviembre de 1.962.

Parte de este texto ha sido incluido en la comunicación presentada por el autor en la 34ª Sesión del Instituto Internacional de Estadística celebrada en Ottawa (Canadá) en Septiembre de 1.963.

**LOS METODOS ESTADISTICOS DE CONTROL
EN LOS PROCESOS INDUSTRIALES CONTINUOS
2.º parte***

por J. Torrens-Ibern
Doctor Ingeniero Industrial

Profesor titular de la Cátedra "J. A. de Artigas Sanz" de
la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de
Barcelona y de la Escuela de Administración de Empresas

5.- LA INSPECCION EN LA PRODUCCION CONTINUA DIFERENCIADA.

El primer trabajo de exposición y justificación de este método apareció en 1943 con la firma de H.F. Dodge (6), quien, luego, ha continuado desarrollándolo con la ayuda de sus colaboradores. En su forma más simple consiste en un muestreo inverso, es decir, que se inspeccionan las piezas según cierto orden hasta encontrar una pieza defectuosa o hasta admitir que la calidad de la fabricación es, por el momento, buena, en lugar de determinar el número de desechos contenidos en una muestra de tamaño dado previamente sacada.

El método propuesto por Dodge consiste en la observación de las piezas que van saliendo de la máquina mediante un control al 100 por 100 hasta encontrar cierto número i de piezas buenas consecutivas. A partir de este momento la inspección total puede sustituirse por un muestreo, a condición que la economía así obtenida compense el riesgo de error inherente a todo control por muestra. La inspección, entonces, se limitará a una fracción f de las piezas producidas; si durante la inspección parcial apareciese una pieza defectuosa se volvería a la inspección total, mientras que se continuaría con la inspección parcial en tanto no salga ningún desecho.

5.1.- TEORIA DEL METODO.

Sea una producción continua de piezas caracterizada por un tanto por ciento defectuoso ω . La probabilidad de una ráfaga de i piezas buenas, sin tener en cuenta la calidad de la siguiente, $i + 1$, es:

$$\text{pr } (m \geq i) = (1 - \omega)^i$$

donde m es el número de piezas buenas consecutivas efectivamente encontradas.

*La primera parte se publicó en el fascículo anterior (pag.149-166)

Supongamos que este plan de inspección funciona desde hace cierto tiempo; si llamamos F a la fracción total efectivamente verificada, u al número medio de piezas controladas durante los períodos de inspección total y v al número medio de piezas fabricadas en los períodos de inspección parcial, tendremos:

$$F = \frac{u + fv}{u + v} = \frac{\frac{u}{v} + f}{\frac{u}{v} + 1}$$

siendo la fracción total de piezas no inspeccionadas:

$$1 - F = \frac{1 - f}{\frac{u}{v} + 1}$$

La relación u/v se deduce fácilmente de u/fv , o sea de la relación entre el número medio de piezas inspeccionadas al 100 por 100 y el número medio de piezas verificadas efectivamente durante la inspección parcial; esta relación es la misma que la existente entre la probabilidad de una ráfaga inferior a i piezas buenas y la de una ráfaga de al menos i piezas buenas:

$$\frac{u}{fv} = \frac{\text{pr}(m < i)}{\text{pr}(m \geq i)} = \frac{1 - (1 - \omega)^i}{(1 - \omega)^i}$$

de donde:

$$\frac{u}{v} = \frac{1 - (1 - \omega)^i}{(1 - \omega)^i} f$$

y finalmente:

$$F = \frac{f}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i} \quad \text{y} \quad 1 - F = \frac{(1 - f)(1 - \omega)^i}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i}$$

Es evidente, pues, que el tanto por ciento medio de piezas defectuosas, A , que han podido pasar a través del control será:

$$A = (1 - F)\omega = \frac{(1 - f)(1 - \omega)^i}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i} \omega$$

Esta proporción A de desechos que han pasado a través de la inspección es el AOQ; es función de ω y su máximo A_0 , que se obtiene haciendo

$$\frac{dA}{d\omega} = 0,$$

es el AOQL del muestreo efectuado.

Si se designa por ω_0 el valor de ω ligado al tanto por ciento defectuoso máximo A_0 , mediante sencillas transformaciones algebraicas se obtendrán las fórmulas siguientes que permitirán calcular las principales características del plan de control en función de las necesidades de la calidad de la fabricación:

$$A_0 = \frac{\omega_0 (1 + i) - 1}{i}$$

$$\omega_0 = \frac{1 + iA_0}{1 + i}$$

$$f = \frac{(1 - \omega_0)^{i+1}}{(1 - \omega_0)^{i+1} + iA_0}$$

$$F_0 = \frac{1 - A_0}{1 + iA_0}$$

La última ecuación da el valor de la fracción de piezas controladas cuando el tanto por ciento de desechos en la fabricación es ω_0 o sea cuando después del control se tiene un máximo de piezas defectuosas.

Dodge trazó las curvas que dan la fracción de piezas no controladas ($1 - F$) para diferentes valores de i y f en función del tanto por ciento defectuoso fabricado. Estas curvas son siempre descendentes al aumentar el número de desechos en la fabricación y descienden tanto más suavemente cuanto más pequeños son los valores de i y de f , y mayor es el AOQL admitido. En ellas se aprecia que la influencia del valor de i es más importante que la de la fracción f de piezas controladas durante los períodos de inspección parcial. Otras curvas también construídas y publicadas por Dodge (7) y reproducidas en la fig. 9 permiten determinar gráficamente los valores de i y de f en función de A_0 , tanto por ciento máximo de piezas defectuosas que se desea garantizar a los clientes. Esta condición no parece suficiente para la mejor elección de las características del plan de muestreo; para ello es preferible fijar la fracción F de piezas que se controlarán efectivamente pues to que esto es lo que determina la economía del plan de inspección. La idea inicial del método que vamos a exponer proviene de un artículo de R.B. Murphy (8) pero el desarrollo que le hemos dado y que permite su aplicación práctica es muy diferente.

5.2.- DETERMINACION DE LOS VALORES CARACTERISTICOS DEL PLAN.

Supongamos fijados los valores de i y de f ; la división

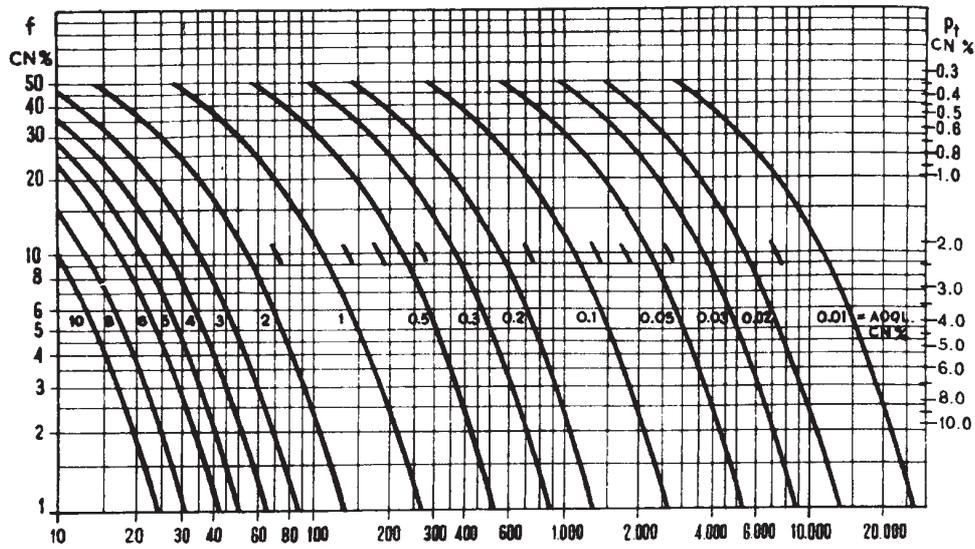


Fig. 9.- Curvas para determinar el número i y la fracción f en función del AOQL deseado. P_t es el valor del tanto por ciento defectuoso en una producción continua de 1000 unidades en la cual, con un muestreo de $f\%$, la probabilidad de aceptación es 0,10 (Dogde).

de F y $1 - F$ da, después de una pequeña transformación:

$$\frac{f}{1-f} = \frac{F(\omega)}{1 - F(\omega)} (1 - \omega)^i$$

Como que el primer miembro tiene un valor bien definido, la fracción F es verdaderamente función de ω , lo que se manifiesta mediante la expresión $F(\omega)$. Podemos, pues, establecer la identidad de dos expresiones del segundo miembro para valores diferentes de ω , el que corresponde al tanto por ciento de desechos Ω , propio de la fabricación corriente y el ω_0 que corresponde a las condiciones de obtención del AOQL. Entonces se tiene:

$$\frac{F(\Omega)}{1 - F(\Omega)} (1 - \Omega)^i = \frac{F(\omega_0)}{1 - F(\omega_0)} (1 - \omega_0)^i = \frac{1 - A_0}{(i + 1) A_0} \left(\frac{i(1 - A_0)}{i + 1} \right)^i$$

y después de fáciles transformaciones:

$$\frac{(1 - A_0) (1 - F(\Omega))}{A_0 F(\Omega)} \left(\frac{1 - A_0}{1 - \Omega} \right)^i = \frac{(i + 1)^{i+1}}{i^i}$$

Tomando logaritmos se tiene:

$$\log \frac{(1 - A_0) (1 - F(\Omega))}{A_0 F(\Omega)} - i \log \frac{1 - \Omega}{1 - A_0} = (i + 1) \log(i + 1) - i \log i$$

El segundo miembro de esta ecuación es una función logarítmica de i que podemos designar $\phi(i)$, independiente de cualquier otra variable; puede, por consiguiente, representarse en un gráfico válido para todos los cálculos, cualquiera que sea el plan de inspección estudiado. Para tener mayor precisión se pueden trazar varias curvas a escalas diferentes de la misma función $\phi(i)$ (Fig. 10). Por otra parte, el primer miembro de la ecuación anterior es

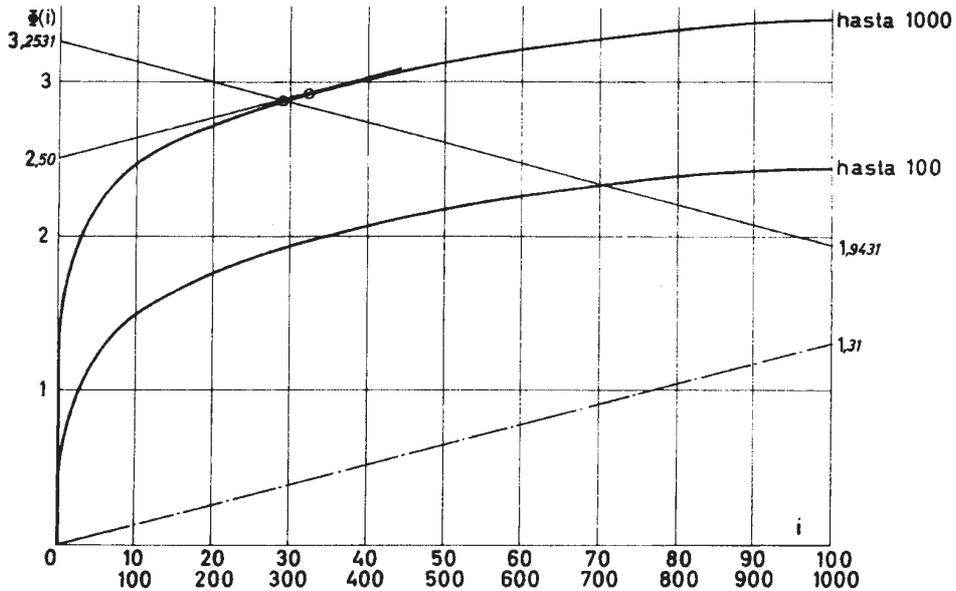


Fig.10.- Curvas para determinar el número i en función de la fracción F que se desea inspeccionar y de los tantos por ciento defectuosos en la fabricación y después de la inspección.

una función lineal en i ; después de calcular los logaritmos indicados, la recta que la representa se sitúa fácilmente en el gráfico por medio de una regla o de una recta trazada sobre papel transparente. La intersección de la recta y la curva $\phi(i)$ dará el valor de i , a la escala que corresponda.

El valor de f se calculará mediante la fórmula siguiente, en función del tanto por ciento de desechos Ω corriente y de la fracción controlada correspondiente $F(\Omega)$:

$$f = \frac{F(\Omega) (1 - \Omega)^i}{1 - F(\Omega) [1 - (1 - \Omega)^i]}$$

Cuando la calidad que se quiere garantizar es menos buena que la de la fabricación ($\Omega < A_0$) la recta es descendente y la solución del problema se encuentra sin dificultad. Si deseamos, por el contrario, hacer servir la inspección para mejorar la calidad saliente, es decir, si $\Omega > A_0$, la relación $(1 - \Omega) / (1 - A_0)$ es menor que la unidad, su logaritmo negativo y la recta es ascen

dente. En las condiciones consideradas, es decir para ciertos valores de $F(\Omega)$, puede ocurrir que el problema no tenga solución. El gráfico será todavía útil para determinar las condiciones óptimas de la inspección dentro de las posibles, o sea aquellas que den un valor mínimo a $F(\Omega)$. Se obtiene esta solución mediante la tangente a la curva $\phi(i)$ que tenga la inclinación dada por la expresión:

$$-i \log \frac{1 - \Omega}{1 - A_0} = i \log \frac{1 - A_0}{1 - \Omega}$$

sea gráficamente (resultado muy impreciso), sea analíticamente. El valor leído en el punto del eje de ordenadas cortado por la tangente, $\log B$, permitirá calcular $F(\Omega)$, después de haber pasado a los antilogaritmos:

$$F(\Omega) = \frac{1 - A_0}{1 + A_0 (B - 1)}$$

Este valor será el mínimo que puede tener la fracción $F(\Omega)$ para valores dados de A_0 y Ω ; el número i de unidades a inspeccionar en una secuencia ininterrumpida de piezas buenas será el que señala la abscisa del punto de tangencia de la recta con la curva $\phi(i)$

El trazado de esta tangente no permitiría, sin embargo, determinar con precisión i a causa de la poca curvatura de la función $\phi(i)$ en el punto de tangencia. La solución analítica es, además, muy fácil; basta igualar las derivadas de la curva $\phi(i)$ y de la recta tangente. La derivada de la curva es:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(i)}{di} &= \frac{1}{1 \cdot 10} \cdot \frac{i+1}{i+1} + \log(i+1) - \frac{1}{1 \cdot 10} \frac{i}{i} - \log i = \\ &= \log \frac{i+1}{i} \end{aligned}$$

y la de la recta, con relación a i , es:

$$\log \frac{1 - A_0}{1 - \Omega}$$

Por consiguiente, se tendrá:

$$\frac{i+1}{i} = \frac{1 - A_0}{1 - \Omega}$$

El resultado final es, simplemente:

$$i = \frac{1 - \Omega}{\Omega - A_0}$$

Toda otra recta paralela a ésta y secante a la curva $\Phi(i)$ dará pares de soluciones para i con valores únicos para F , pero esta fracción sería mayor que la determinada mediante la recta tangente y, por lo tanto, los planes de inspección así definidos serían menos económicos que aquél.

5.2.1.- EJEMPLOS DE APLICACION.

1º. Sea una fabricación que da en promedio un 2 por mil de piezas defectuosas; deseamos garantizar una calidad saliente media del 5 por mil controlando la décima parte sólo de la producción cuando la calidad es la indicada ($\Omega = 0,002$).

Sucesivamente calcularemos:

$$B = \frac{0,995 \times 0,90}{0,005 \times 0,10} = 1,791$$

$$\log B = 3,25310$$

$$\log \frac{1 - \Omega}{1 - A_0} = \log 0,998 - \log 0,995 = 0,00131$$

$$3,25310 - 1000 \times 0,00131 = 1,9431$$

La recta que pasa por los puntos:

$$i = 0 \quad \Phi(i) = 3,2531$$

$$i = 1000 \quad \Phi(i) = 1,9431$$

corta la curva trazada a su misma escala en una abscisa $i = 290$ (fig. 10); la fracción de las piezas producidas que se inspeccionarán después de haber encontrado 290 buenas consecutivas es:

$$f = \frac{0,10 \times 0,998^{290}}{1 - 0,10 (1 - 0,998^{290})} = 0,06$$

o sea el 6 por ciento.

2º. Consideremos el caso contrario, es decir que el promedio defectuoso sea 5 por mil en condiciones normales de fabricación y deseemos garantizar una calidad media de 2 por mil.

Calculemos:

$$\log \frac{1 - A_0}{1 - \Omega} = \log 0,998 - \log 0,995 = 0,00131$$

y tracemos la recta tangente a la curva 2ª de la fig. 10, paralela a la que pasa por los puntos:

$$i = 0 \quad \Phi(i) = 0$$

$$i = 1000 \quad \Phi(i) = 1000 \times 0,00131 = 1,31$$

El punto de tangencia se encuentra en la curva $\Phi(i)$ en la abscisa:

$$i = \frac{1 - \Omega}{\Omega - A_0} = \frac{0,995}{0,003} = 332$$

$$\log B = 2,50 \quad B = 316,22$$

La fracción total de piezas controladas será:

$$F(\Omega) = \frac{1 - 0,002}{1 + 0,002 \times 315,22} = 0,612$$

y la fracción de piezas a controlar en las secuencias de inspección parcial:

$$f = \frac{0,612 \times 0,995^{332}}{1 - 0,612 (1 - 0,995^{332})} = 0,23$$

En este caso el plan de inspección a aplicar consistirá en una verificación al cien por cien hasta haber encontrado 332 piezas consecutivas buenas, pasando luego al control de una pieza de cada 4, mientras tanto no aparezca ninguna defectuosa.

5.2.- APLICACION AL CONTROL EN CURSO DE FABRICACION.

Para utilizar este método en el control en curso de fabricación de las producciones continuas hay que aplicarle ciertas variantes. Es esencial, entonces, que se pueda intervenir y actuar rápidamente, si la calidad empeora significativamente, sin que, por el contrario, se esté tentado de hacerlo cuando la calidad se conserva adecuada. En este caso se definen las reglas de intervención (stopping rules), que equivalen a las líneas de intervención de los gráficos de control clásicos, a base de las secuencias o ráfagas de inspección total (screening sequences), o sea de cada sucesión ininterrumpida de piezas controladas al cien por cien, al final de la cual se toma la decisión, sea de arreglar la máquina, sea de restringir el rigor del control, pasando a una inspección parcial.

Murphy (8) caracteriza las diferentes reglas de intervención que se han propuesto por medio de una o dos cifras, indicando respectivamente el tamaño de las secuencias de inspección total y el número de piezas defectuosas que encontradas dentro de una de estas secuencias provocarían el arreglo de la máquina. Así, por ejemplo, una regla (i,r) significa que las secuencias o ráfagas de inspección total son de i piezas y que se debe proceder a arreglar la máquina tan pronto como se encuentren r desechos en una misma secuencia.

Las reglas expuestas y estudiadas por Murphy son las siguientes:

Regla ($n^* - 1$): Intervenir tan pronto como aparezca una pieza defectuosa después de haber controlado $n^* - 1$ piezas en cualquier secuencia de inspección total.

Regla (r): Intervenir tan pronto como haya aparecido un número r de piezas defectuosas en cualquier secuencia de inspección total.

Regla (N, R): Intervenir tan pronto como haya aparecido un número R de piezas defectuosas en cualquier bloque de N piezas inspeccionadas (sin que se solapen estos bloques).

Regla (n^*): Intervenir tan pronto como se haya inspeccionado un número n^* de piezas en cualquier secuencia de inspección sin haber llegado a finalizarla.

El artículo mencionado compara estas diferentes reglas de intervención y da los procedimientos de cálculo para determinar los parámetros de la regla en función de las necesidades de la producción y de su control. Para ello Murphy se basa en los valores de la calidad saliente garantizada AOQL y del número medio E de unidades producidas entre dos paros sucesivos cuando el tanto por ciento medio defectuoso es Ω , escogiendo arbitrariamente un número E muy elevado ($E = 10.000$) para no hacer arreglos superfluos de la máquina cuando funciona correctamente. Obsérvese que este número E tiene cierta semejanza con la característica del plan definida anteriormente (9), denominada longitud media de la ráfaga (ARL).

Por nuestra parte (10) considerando también una regla (i, r) hemos preferido basarnos en la teoría general de las pruebas de hipótesis para determinar estos parámetros, i y r , en función de los riesgos α y β , lo que es equivalente, en función de los ARL relativos a las calidades de fabricación aceptable y rechazable. Para la prueba a definir fijaremos, pues, las siguientes condiciones:

1º. Mientras el proceso produzca ω_A (o menos de ω_A) desechos admitimos equivocarnos α veces procediendo al reglaje de lo que funciona correctamente.

2º. Si el proceso llega a producir ω_R (o más de ω_R) desechos admitimos equivocarnos β veces no procediendo al reglaje de lo que funciona incorrectamente.

La probabilidad de aparición de r desechos en secuencias que no lleguen a totalizar i piezas buenas es:

$$Q_{\omega} = [1 - (1 - \omega)^i]^r$$

Sustituyendo, respectivamente, Q_{ω} por α y por $(1 - \beta)$, y ω por las proporciones defectuosas aceptable $\omega_A = AQL$ y rechazable $\omega_R = RQL$ se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha = [1 - (1 - \omega_A)^i]^r$$

$$1 - \beta = [1 - (1 - \omega_R)^i]^r$$

las cuales se transforman fácilmente en las siguientes:

$$\log (1 - \sqrt[r]{\alpha}) = i \log (1 - \omega_A)$$

$$\log (1 - \sqrt[r]{1 - \beta}) = i \log (1 - \omega_R)$$

y dividiendo la segunda por la primera:

$$\frac{\log (1 - \sqrt[r]{1 - \beta})}{\log (1 - \sqrt[r]{\alpha})} = \frac{\log (1 - \omega_R)}{\log (1 - \omega_A)} = K$$

Esta ecuación, de la cual se ha eliminado i , se resuelve sin dificultad dando a r valores enteros 1, 2, 3, y comparando cada vez

$$\log (1 - \sqrt[r]{1 - \beta}) \quad \text{con} \quad K \log (1 - \sqrt[r]{\alpha})$$

Para mayor claridad y exactitud conviene hacer los cálculos en una tabla, ayudándose finalmente con un gráfico (ver, a continuación el ejemplo 5.3.1.)

Una vez conocido r (para el cual se escoje el valor entero más próximo al que satisface la ecuación anterior) el cálculo de i es muy fácil:

$$i = \frac{\log (1 - \sqrt[r]{\alpha})}{\log (1 - \omega_A)}$$

Se comprobará, finalmente, el valor de β realmente obtenido con los parámetros i y r calculados para poder modificar este último, aumentándolo o disminuyéndolo de una unidad, si las condiciones de eficacia resultantes fuesen demasiado diferentes de las apetecidas.

Partiendo de los valores de i y r es fácil, además, trazar la curva característica; basta aplicar la fórmula que da la probabilidad de rechazo Q_ω a diferentes valores de ω . También puede trazarse la curva ARL calculando para diferentes valores de ω :

$$L_\omega = \frac{1}{Q_\omega} = \frac{1}{[1 - (1 - \omega)^i]^r}$$

La aplicación de estos métodos, como todos los que están esencialmente basados en un control por atributos, resulta poco sensible en la mayoría de los casos puesto que se obtienen para i valores bastante elevados cuando se desea una eficacia de control suficiente, lo que da lugar a secuencias de inspección total muy lar

gas durante las cuales la máquina puede trabajar en condiciones incorrectas. Este método es, por consiguiente, adecuado sólo para producciones en gran serie.

5.3.1.- EJEMPLO DE CALCULO.

Determinar el plan de inspección y muestreo para controlar una fabricación empleando una regla del tipo (i,r) de acuerdo con las siguientes condiciones de eficacia:

$$\begin{array}{llll} \text{AQL} & \omega_A = 0,001 & \alpha = 0,001 & L_A = 1000 \\ \text{RQL} & \omega_R = 0,010 & \beta = 0,50 & L_R = 2 \end{array}$$

Primeramente calcularemos:

$$K = \frac{\log(1 - \omega_R)}{\log(1 - \omega_A)} = \frac{\log 0,990}{\log 0,999} = 11$$

y luego construiremos la tabla siguiente para el resto de los cálculos:

r	$\log \sqrt[r]{0,5}$	$\log \sqrt[r]{0,001}$	$1 - \sqrt[r]{0,5}$	$1 - \sqrt[r]{0,001}$	$\log(1 - \sqrt[r]{0,001})$	$K \log(1 - \sqrt[r]{0,001})$	$\log(1 - \sqrt[r]{0,5})$
1	1,6990	3,0000	0,5	0,9990	-0,0004	-0,0044	-0,3010
2	1,8495	2,5000	0,2935	0,9684	-0,0139	-0,1529	-0,5324
3	1,8997	1,0000	0,2062	0,9000	-0,0458	-0,5038	-0,6857
4	1,9247	1,2500	0,1592	0,8222	-0,0850	-0,9350	-0,7980

La comparación de los últimos resultados inscritos en la tabla indican que el valor exacto de r está situado entre 3 y 4; la figura 11 lo confirma. Admitiendo para r sucesivamente estos dos valores se tendrán los siguientes resultados:

$$\boxed{r = 3} \quad i = \frac{\log(1 - \sqrt[r]{\alpha})}{\log(1 - \omega_A)} = \frac{-0,0458}{-0,0004} = 114,5$$

Cálculo de β :

$$\log(1 - \sqrt[3]{1 - \beta}) = -0,5038 = 1,4962$$

$$\beta = 0,68 \quad L_R = \frac{1}{1 - 0,68} = 3,2$$

$$\boxed{r = 4} \quad i = \frac{\log(1 - \sqrt[r]{\alpha})}{\log(1 - \omega_A)} = \frac{-0,0850}{-0,0004} = 212,5$$

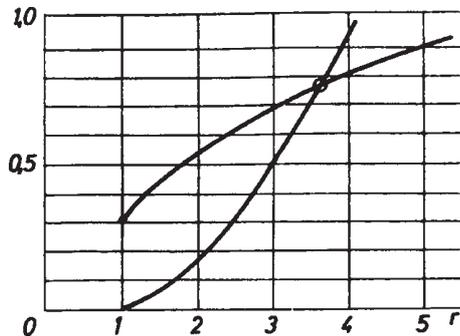


Fig. 11.- Determinación del número de unidades defectuosas r.

Cálculo de β :

$$\log (1 - \sqrt[4]{1 - \beta}) =$$

$$= - 0,9350 = \bar{1},0650$$

$$\beta = 0,39$$

$$I_R = \frac{1}{1 - 0,39} = 1,64$$

Por consiguiente, se puede escoger entre dos soluciones:

1ª.- Regla de intervención (115, 3): Intervenir cuando hayan salido 3 piezas de

defectuosas sin haber llegado a obtener 115 buenas consecutivas. El riesgo de error β es de 0,68, es decir que en promedio pueden llegarse a controlar $114,5 \times 3,2 = 365$ piezas buenas sin darse cuenta de un desarreglo de la máquina.

2ª.- Regla de intervención (213, 4): Intervenir cuando hayan salido 4 piezas defectuosas sin haber llegado a obtener 213 buenas consecutivas. El riesgo de error β es de 0,39, o sea que en promedio se pueden llegar a controlar $212,5 \times 1,64 = 348$ piezas buenas sin darse cuenta de un desarreglo de la máquina.

De la comparación de las dos soluciones se deduce que la segunda es mejor.

5.4.- INSPECCION CON VARIOS NIVELES.

Otra variante de aplicación del método de Dodge tiene por objeto hacerlo más flexible cuando la calidad mínima que se garantiza al cliente es netamente inferior a la que produce normalmente el proceso, es decir cuando el tanto por ciento defectuoso fabricado es menor que el necesario. Entonces es adecuada la implantación de un sistema de control con varios niveles.

Este método consiste en lo siguiente: Se empieza como se ha indicado anteriormente con un control al 100 por 100 hasta llegar a encontrar i piezas consecutivas buenas. Se pasa, luego, a un primer nivel de inspección parcial en el cual se controla una fracción f de la producción, hasta tanto que se han encontrado i piezas buenas consecutivas. Empieza entonces otro período de inspección parcial más suave, o segundo nivel, en el cual se controla una fracción f^2 de la totalidad de las piezas. Análogamente al llegar a encontrar i piezas consecutivas buenas se pasa a un tercer nivel de inspección, controlando una fracción f^3 de la producción, y así se continúa suavizando sucesivamente el rigor de la inspección por etapas de i piezas buenas consecutivas hasta un nivel k en el que se controla una fracción sólo de f^k , por debajo de la cual ya no se desciende.

Cuando en uno cualquiera de los niveles de inspección se encuentra una pieza defectuosa se vuelve al nivel inmediato anterior más severo, pudiéndose llegar incluso de nuevo al control al 100 por 100 si se van encontrando piezas malas demasiado a menudo.

El proceso de control llamado CSP por Dodge o sea de inspección en producción continua de varios niveles admite, pues, una gran flexibilidad de acción, permitiendo pasar de planes más severos a otros más suaves o viceversa según los resultados que se van encontrando en el curso de la propia verificación.

La determinación de los parámetros del plan de inspección i y f así como el número máximo de los distintos niveles, se basa en la misma teoría antes expuesta y que se resume en la fórmula

$$F = \frac{f}{f + (1-f)(1-\omega)^i}$$

Llamando F_j a la proporción de piezas verificadas en el nivel j de la inspección, es decir cuando la fracción que se controla es f^j de la producción, se tiene:

$$F_j = \frac{f^j}{f^j + (1-f^j)(1-\omega)^i}$$

Comparando las proporciones F_j y F_{j-1} correspondientes a dos niveles consecutivos de inspección resulta:

$$\frac{F_j}{F_{j-1}} = \frac{f \left[(1-f^{j-1})(1-\omega)^i + f^{j-1} \right]}{(1-f^j)(1-\omega)^i + f^j} = \frac{(f-f^j)(1-\omega)^i + f^j}{(1-f^j)(1-\omega)^i + f^j}$$

Dado que f es menor que la unidad

$$(f-f^j) < (1-f^j) \quad \text{y} \quad F_j < F_{j-1}$$

o sea que para una proporción de piezas defectuosas ω constante la fracción F que se controla efectivamente disminuye al pasar de un nivel de inspección al superior. Basta, por consiguiente, calcular los parámetros i y f correspondientes al primer nivel para una fracción F dada, puesto que si se mantiene constante la calidad de la fabricación esta fracción F será la máxima, y la inspección que se efectúa en los niveles menos rigurosos todavía más económica.

Existen aún otras variantes descritas en el manual "Hand book H-106" publicado por el Gobierno de los Estados Unidos (11) para la divulgación de estos métodos. Una variante muy utilizada con muestreo en tres niveles y dos etapas en cada nivel está esquematizada en el diagrama adjunto (Fig. 12).

6.- CONCLUSION Y RESUMEN.

Los métodos de control estadístico apropiados para la ins

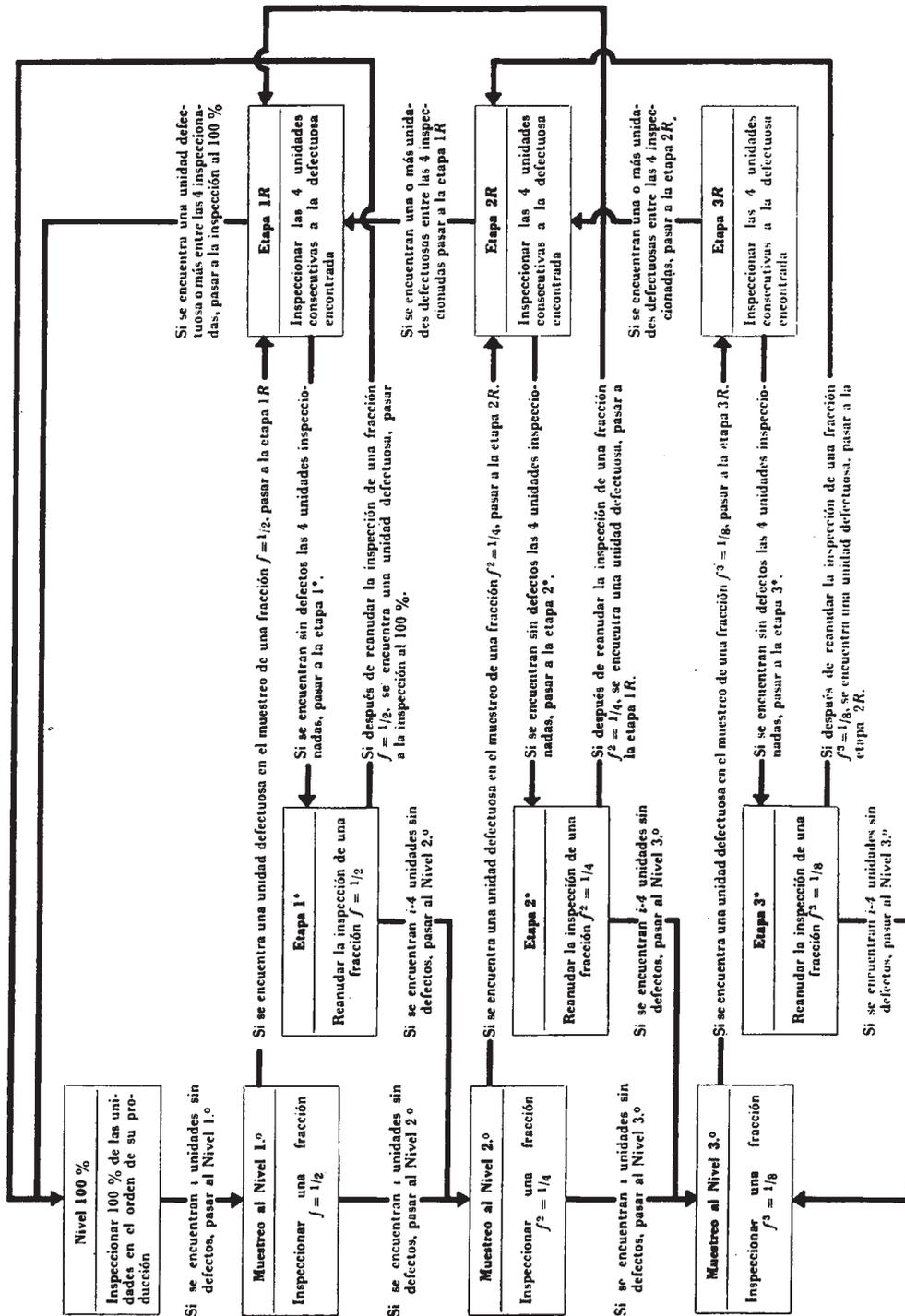


Fig. 12.- Diagrama de la inspección en producción continua con muestreo en tres niveles. (Handbook H. 106).

pección de procesos industriales continuos se separan bastante de los tradicionales por su mayor eficacia y mayor flexibilidad de aplicación. En todo proceso de fabricación, especialmente en los continuos, conviene estar constantemente al acecho para corregir cualquier modificación que intervenga en él, ya que ello podría empeorar la calidad producida.

A pesar de sus grandes ventajas los gráficos de control clásicos, además, no siempre son aplicables, sea por las condiciones específicas del producto fabricado, sea por la formación que exigen de los operarios.

Por todas estas razones, pues, se han ideado nuevos métodos de inspección, unos relativos a producciones continuas no diferenciadas (industrias químicas, hilatura, fundición en cubilote, etc.) otros relativos a producciones continuas diferenciadas (tornillería y embutición y corte, en grandes series).

Después de la definición de las ARL (longitud media de las ráfagas) para caracterizar de la manera mejor el control estadístico en curso de fabricación, se estudian en detalle en este artículo los gráficos de control de sumas acumuladas con rectas límites paralelas para las producciones continuas no diferenciadas (1ª parte, en el Fascículo 3º, pág. 149-166), y los planes continuos de muestreo (CSP) con sus reglas de intervención y sus secuencias de inspección total o parcial para las producciones continuas diferenciadas.

Las ventajas de unos y otros son importantes; además de la mayor eficacia y mayor flexibilidad antes indicadas como características de estos métodos, es interesante observar que los planes continuos pueden servir en la inspección final de fabricación, para garantizar la calidad deseada, tanto si ésta es superior como inferior a la producida, con una fracción controlada mínima, y por consiguiente con la máxima economía de verificación.

Este estudio ha sido realizado dentro del marco del programa de investigaciones del Departamento de Investigación Operativa de "Ingenieros Consultores, S.A." Damos muchas gracias a esta Sociedad por la autorización que nos ha dado de publicarlo.

ERRATA: En la primera parte de este artículo, además de algunos pequeños errores que el lector habrá subsanado, hay una frase afirmativa que debe ser negativa: Pág. 152, lín. 17-18 = "... el valor de Δ no puede considerarse despreciable." En la fig. 6 de la pag. 155 la cota escrita T_2 debe leerse $t_{f\sigma}$.

N O T A S.

- (6) H.F. DODGE. "A Sampling Inspection Plan for Continuous Production" *Annals of Mathematical Statistics*. Vol. XIV, nº 3, 1943, pág. 264-269.
" " "Sampling Plans for Continuous Production". *Industrial Quality Control*. Vol. IV, nº 3, nov. 1947, pág. 5-9.
- (7) Además de en el artículo ref. (6), pág. 274, y en el libro ref. (1), pág. 301, se encuentran en E.L. GRANT. "Statistical Quality Control", 2nd. ed., pág. 355.
- (8) R.B. MURPHY. "Stopping Rules with CSP. 1 Sampling Inspection Plans in Continuous Production". *Industrial Quality Control*, Vol. XVI, nº 5, nov. 1959, pág. 10-16.
- (9) Párrafo 2 de este artículo: C.E.A.I.O., Vol. II, Fasc. 3, pág. 151.
- (10) J. TORRENS-IBERN: "Nuevos métodos de inspección en Producción Continua". *Dyna*. Vol. XXXVII, nº 4, Abril 1962, pág. 213-222.
- (11) U.S. GOVERNMENT PRINTING OFFICE "Multi-level Continuous Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes" *Inspection and Quality Control Handbook H.106*, 1958.

Parte de este texto se incluyó en la comunicación presentada por el autor en la 34ª Sesión del Instituto Internacional de Estadística celebrada en Ottawa (Canadá) en Septiembre 1963.

Esta segunda parte había constituido anteriormente el texto de la conferencia pronunciada en el Seminario de Estadística Aplicada e Investigación Operativa (Cátedra "J.A. de Artigas Sanz"), bajo el patrocinio del Instituto de Economía de la Empresa, en el Aula Magna de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona, el día 24 de Noviembre de 1960.