MÉTODOS PARA LA DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DEL LOTE EN ARTÍCULOS SUJETOS A ÓRDENES CONJUNTAS

LUÍS ONIEVA, JUAN LARRAÑETA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

En el presente trabajo se analizan las heurísticas propuestas para el problema de órdenes conjuntas con un planteamiento unificado, mostrando la inestabilidad de los resultados que de ellas se derivan. La relajación del problema tiene una sencilla solución que da lugar a una nueva regla heurística estable para la obtención de soluciones aproximadas, se incluye un análisis del error de la aproximación.

Keywords: Ordenes conjuntas, tamaño del lote.

1. INTRODUCCION

Cuando una orden de aprovisionamiento contempla la posibilidad de solicitar conjunta y simultáneamente lotes de varios artículos estamos en la situación de órdenes conjuntas. Otro contexto análogo es el de decidir el empaquetado de una línea de productos en distintos envases tras su producción conjunta. En ambos casos se valora la ventaja que supone incurrir sólo en una preparación de las operaciones para todo el conjunto de los productos, comparado con lo que supondría hacerlo por separado.

Este problema ha sido extensamente tratado en la literatura por distintos investigadores (Shu /1/, Nocturne /2/, Goyal /3/ y /4/, Silver /5/, Goyal y Belton /6/).

La política básica que se pretende obtener consiste en realizar un pedido conjunto en intervalos de tiempo iguales, decidiendo para cada uno de los productos con que periodicidad intervienen en el pedido conjunto, de forma que el coste total sea mínimo. En las condiciones deterministas supuestas, los lotes de los productos cubrirán exactamente la demanda durante un número entero de veces el intervalo básico entre órdenes: la periodicidad con la que aparecen en la orden multiplicado por el intervalo de ésta.

El supuesto que se analiza corresponde al mismo en el que se desarrolla el lote económico, sin descuento, excepto la estructura de los costes de

• Luís Onieva , Juan Larrañeta. Universidad de Sevilla. Dep. de Organización. Sevilla
• Article rebut el març de 1987.

lanzamiento. Respetando, en lo posible, la notación empleada por Silver /5/, definimos:

- n - número de artículos en el grupo.
- i - índice correspondiente a cada artículo ($i=1,2,...,n$).
- R_i - tasa de demanda del artículo i en unidades/año.
- h_i - coste de mantenimiento del artículo i en pts./unid. año.
- S - coste de lanzamiento principal del grupo, en pts., en el que se incurre por el hecho de realizar un pedido, independientemente de qué artículos del grupo estén incluidos.
- s_i - coste de lanzamiento incremental en pts., que supone incluir el artículo i en el pedido del grupo.
- t - intervalo de tiempo, en años, entre pedidos del grupo (supuesto una variable contínua).
- k_i - número entero que multiplica a t, indicando la duración del lote solicitado para el artículo i ($Q_i = k_i\ t\ R_i$).
- TE_i - tiempo económico del artículo i si se pide independientemente y si su coste de lanzamiento fuera únicamente s_i:

$$TE_i = (2\ s_i/h_i\ R_i)^{\frac{1}{2}}$$

Con los supuestos y la notación anterior, analizamos la política de realizar un pedido para el grupo cada t años, incluyéndose el artículo i cada k_i pedidos. La cantidad solicitada de cada artículo i, cuando participa en el pedido, es de $k_i t R_i$, que cubre sus necesidades hasta el nuevo pedido en el que participe. Esta es una política de ciclo simple. Reduciéndonos a analizar estas políticas, los costes totales relevantes son:

$$CTR(t,k_i{}'s) = \left(S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i\right) \cdot \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i \qquad (1)$$

representando el primer término los costes medios de lanzamiento y los de mantenimiento el segundo. Ambos están referidos a la variable de decisión contínua t que refleja el intervalo entre pedidos, y a las multiplicidades k_i ($i=1,2,...,n$) enteras.

El problema que se plantea es el de seleccionar los valores de t y k_i que minimizan los costes totales dentro de la clase de políticas cíclicas simples descritas. La formulación del problema es:

$$\begin{aligned} \text{Min.}\quad & CTR(t,k_i{}'s) \\ \text{s.a.}\quad & k_i \text{ enteros positivos; } i=1,...,n \qquad (2) \\ & t \geqq 0 \end{aligned}$$

2. PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES

La función $CTR(t,k_i{'}s)$, que recoge los costes relevantes totales como función del intervalo t y las multiplicidades k_i, es convexa en t y unimodal en cada una de las variables k_i.

Manteniendo t constante, a partir de las relaciones:

$$CTR(t,k_i{'}s,k_j-1) \geq CTR(t,k_i{'}s) \leq CTR(t,k_i{'}s,k_j+1) \qquad (3)$$

para cada artículo j=1,2,...,n se obtienen las condiciones locales de optimalidad, que expresan como los costes totales relevantes (CTR) se degradan al variar los valores óptimos enteros de k_i. Estas relaciones son equivalentes a:

$$k_j(k_j-1) \leq (TE_j/t)^2 \leq k_j(k_j+1) \qquad (4)$$

Por otra parte, para un conjunto de valores particulares de las multiplicidades k_i, el intervalo $T(k_i{'}s)$ que da lugar al coste mínimo se obtiene minimizando (1) con respecto a t. Dicho valor es:

$$T(k_i{'}s) = (2(S + \sum_i s_i/k_i) \;/\; \sum_i k_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

con un coste total relevante:

$$CTR(T(k_i{'}s),k_i{'}s) = (2(S + \sum_i s_i/k_i) \;.\; \sum_i k_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

que es solamente función de los valores k_i.

Debido a la existencia de gran cantidad de mínimos locales que satisfacen las relaciones (4), los métodos de búsqueda de dichos mínimos locales dependen fundamentalmente de la selección de un intervalo inicial de partida. Teniendo en cuenta el carácter poco sensible de la curva de costes, en tanto la selección del intervalo inicial sea relativamente acertada, es de esperar que el mínimo local obtenido dé lugar a una solución próxima al óptimo. Silver /5/, Goyal y Belton /6/ y Kaspi y Rosenblatt /8/ presentan heurísticas que consisten en relajaciones de las relaciones (4). La solución aproximada que se obtiene depende, como ya se ha comentado anteriormente, de la elección a priori del valor del intervalo t, diferenciándose esencialmente en ello.

3. ANALISIS DE REGLAS HEURISTICAS EXISTENTES

Las condiciones de mínimo local (4) son equivalentes a:

$$|k_j^2 - (TE_j/t)^2| \leq k_j \quad \text{para cada } j \qquad (7)$$

siendo los valores k_j enteros. Una relajación que parece inmediata es la de permitir valores contınuos para k_j de la forma:

$$k_j = TE_j/t \quad \text{para cada } t \qquad (8)$$

de donde resulta que:

$$k_i = k_j(TE_i/TE_j) \quad \text{para cada } i,j \qquad (9)$$

Fijando un artículo j como base y expresando los costes totales relevantes (1) en función del intervalo t y la multiplicidad del artículo j, se obtiene:

$$CRT(t,k_j) = (S + \frac{TE_j}{k_j} \sum_i \frac{s_i}{TE_i}) \frac{1}{t} + \frac{k_j t}{TE_j} \sum_i \frac{1}{2} TE_i h_i R_i$$

o lo que es lo mismo:

$$CTR(t,k_j) = \{ \frac{TE_j}{k_j t} \sum_{i \neq j} (\frac{s_i h_i R_i}{2})^{\frac{1}{2}} + \frac{k_j t}{TE_j} \sum_{i \neq j} (\frac{s_i h_i R_i}{2})^{\frac{1}{2}} \} +$$

$$+ \{(S + s_j/k_j) \frac{1}{t} + \frac{t}{2} k_j h_j R_j\} \qquad (10)$$

Si consideramos los dos términos entre llaves por separado:

a) El primero alcanza su mínimo en:

$$\sum_{i \neq j} (2 s_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}}$$

siempre que $k_j t = TE_j$, que es precisamente la condición (8).

b) El segundo alcanza su mínimo cuando se igualan los dos sumandos que contiene:

$$S/t = \frac{t}{2} k_j h_j R_j - s_j/k_j t$$

Para que esta relación tenga sentido se requiere que la derecha de la igualdad no se anule. Es decir:

$$k_j t \neq TE_j$$

Observamos así que la imposición de las condiciones (8) conducen a inestabilidad en el modelo (10) que representa los costes relevantes.

Minimizando los costes del segundo término en llaves de la expresión (10), resulta:

$$t^2 = 2 \frac{S + s_j/k_j}{k_j\, h_j\, R_j} \tag{11}$$

que da lugar a un valor

$$(2(S + s_j/k_j)\,(k_j\, h_j\, R_j))^{\frac{1}{2}}$$

para ese término.

De (11) se deducen las heurísticas de Silver (5) y de Goyal y Belton /6/, según la elección del artículo j y el valor que se le dé a k_j:

- Tomando el artículo j cuyo s_i/h_iR_i es mínimo, haciendo k_j=1 y empleando (11) se obtiene la heurística de Silver.

- Seleccionando el artículo j cuyo $(S + s_i)/h_iR_i$ es mínimo, haciendo k_j=1 en (11) se obtiene la heurística de Goyal y Belton.

Continuando con el análisis, estudiamos las repercusiones de esta clase de heurísticas sobre los costes.

Aplicando las condiciones (8) a todos los artículos salvo el j resulta:

$$CTR(t,k_j) = \sum_{i \neq j} (2\, s_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}} + \left\{ (S + s_j/k_j)\, \frac{1}{t} + \frac{t}{2}\, k_j\, h_j\, R_j \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (2\, s_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\, \left\{ ((S + s_j/k_j)(k_j h_j R_j))^{\frac{1}{2}} - (s_j h_j R_j)^{\frac{1}{2}} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (2\, s_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}} + (2\, h_j R_j)^{\frac{1}{2}}\, \left\{ (k_j\, S + s_j)^{\frac{1}{2}} - s_j^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{12}$$

eligiendo t de forma que satisfaga (11).

El primer término de (12) es constante. El segundo es creciente en k_j. Para k_j fija, la expresión entre llaves es decreciente en s_j y creciente h_jR_j.

Por tanto, eligiendo artículos de pequeño s_j/h_jR_j aumenta el valor de (12), disminuyendo para valores grandes de s_j/h_jR_j.

Así, la elección de Silver /5/ no parece muy satisfactoria, pues s_i/h_iR_i pequeño corresponde a valores de s_i relativamente reducidos en relación a h_jR_j, con lo que el segundo término de (12) tiende a crecer. La elección de Goyal y Belton /6/ corresponde a valores reducidos de $(S + s_j)$ pero relativamente elevados de h_jR_j.

En conjunto, parece que fijar un artículo j como el único que participa del coste general de lanzamiento S, haciendo que los demás se rijan por su tiempo económico da lugar a situaciones inestables.

4. NUEVA REGLA HEURISTICA

El problema original (2) se puede relajar parcialmente, permitiendo que los valores k_i sean continuos, pero superiores a la unidad. Con ello, el problema es:

$$\text{Min.} \quad (S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i) \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i \tag{13}$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \geq 1 \qquad \text{para } i=1,2,\ldots,n$$

$$t \geq 0$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker implican la existencia de multiplicadores $\lambda_i \geq 0$; $i=1,2,\ldots,n$ tales que:

$$-\frac{s_i}{k_i^2} \frac{1}{t} + \frac{t}{2} h_i R_i - \lambda_i = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{14}$$

$$(S + \sum_i s_i/k_i) \frac{1}{t} = \frac{t}{2} \sum_i k_i h_i R_i \tag{15}$$

$$\lambda_i (1 - k_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{16}$$

$$\lambda_i \geq 0 \tag{17}$$

De las condiciones anteriores (14), (15), (16) y (17) se deduce:

a) Cuando $k_i > 1$, la correspondiente λ_i es nula según (16), por lo que de (14) resulta: $k_i = TE_i/t$.

b) Cuando $k_i = 1$ las condiciones (14) equivalen a:

$$\frac{s_i}{t} + \lambda_i = \frac{t}{2} h_i R_i$$

lo cual conduce a la interpretación de λ_i según la figura 1.

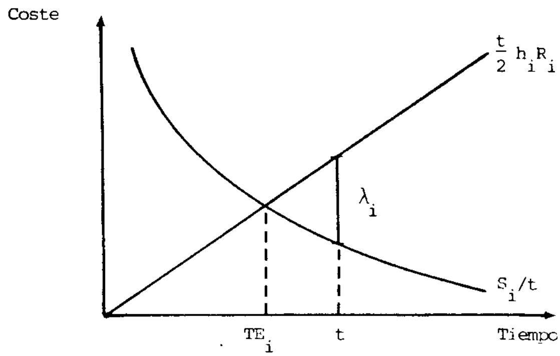

Figura 1: Interpretación de λ_i.

Consideremos los artículos ordenados de forma tal que si $s_i/h_i R_i \leq \leq s_j/h_j R_j$ indica que los $i \leq j$. En este caso, existe un artículo m tal que para $i \leq m$, $k_i = 1$; mientras que para $i > m$, $k_i > 1$. Expresando los costes totales relevantes (1) en función de m, y utilizando las propiedades anteriores (a) y (b) resulta:

$$CTR(t,m) = (S + \sum_{i=1}^{m} s_i) \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{m} h_i R_i + \sum_{i=m+1}^{n} (2 s_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(18)}$$

El intervalo t_H, dependiente de m, que minimiza esta expresión (18) es:

$$t_H = \left(2 \frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i R_i} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(19)}$$

La determinación de m se basa en que $\lambda_i > 0$ siempre que $t^2 > TE_i^2 = 2s_i/h_i R_i$. Por tanto, m es el último artículo para el que se cumple:

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i R_i} \geq \frac{s_m}{h_m R_m} \qquad \textbf{(20)}$$

con un coste total relevante:

$$CTR(t,k_i) = \left[2(S + \sum_{i=1}^{m} s_i)\left(\sum_{i=1}^{m} h_i R_i\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=m+1}^{n} (2\, s_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(21)}$$

ya que $k_i = 1$ para $i=1,2,...,m$; y $k_i = TE_i/t$ para $i=m+1,...,n$.

El objetivo del análisis es determinar los artículos que intervienen en cada pedido. Estos son los m primeros, una vez ordenados según sus tiempos económicos. El resto de los artículos se rige, en la aproximación continua, por su lote económico, no participando del coste de lanzamiento principal S. Los m primeros intervienen en cada orden, determinándose el tiempo económico del subgrupo según (19).

En la figura 1 se observa que siempre que t sea superior al tiempo económico de un artículo, éste debe formar parte del subgrupo que lo define. Al estar ordenados los artículos según su tiempo económico TE_i, la relación (20) identifica el último de ellos para el que todavía $TE_m \leq t$.

Obsérvese que la regla propuesta corresponde a una solución del sistema de ecuaciones (14), (15), (16) y (17) por lo que el mínimo coste medio del problema relajado (21) es una acotación inferior del óptimo. Una cota superior se obtiene sencillamente aplicando (8) para obtener el valor k_i entero más próximo al valor k_i continuo, para $i=m+1,...,n$; y sustituyéndolos en la expresión de los costes totales relevantes (6).

Así pues, la regla heurística de un sólo paso que se propone es la siguiente:

1. Ordenar los artículos por su tiempo económico (TE_i) en orden creciente.
2. Calcular el índice m correspondiente al último artículo para el que se cumple la relación (20).
3. Calcular el intervalo básico de la heurística t_H según (19).
4. Hacer $k_i = 1$, para $i=1,2,...,m$.
5. Para $i=m+1,...,n$; calcular k_i según (4), o lo que es lo mismo, como el mayor entero tal que:

$$k_i(k_i-1) \leq \left(\frac{TE_i}{t_H}\right)^2$$

El coste generado por la solución aproximada propuesta por la heurística puede evaluarse, aplicando (6) como:

$$CTR_H = \left(2(S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i\, h_i\, R_i\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(22)}$$

donde las multiplicidades k_i's tienen como valor el obtenido en los puntos 4 y 5 de la regla propuesta. La figura 2 recoge el diagrama de flujo de esta heurística.

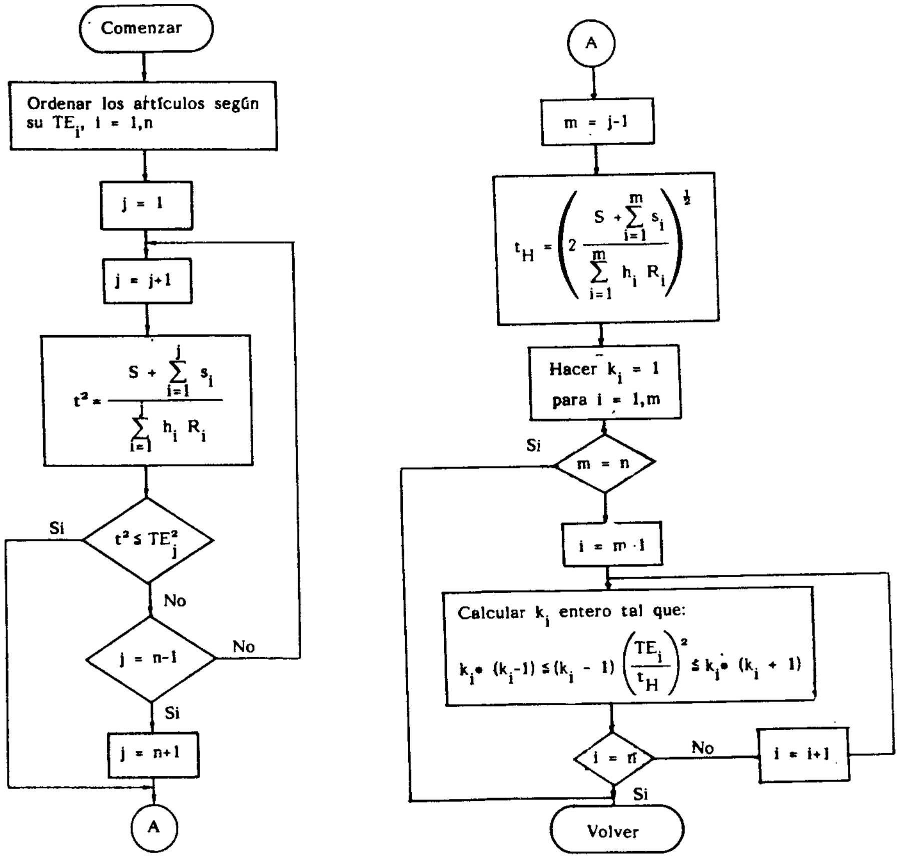

Figura 2: Diagrama de Flujo de la Regla Heurística.

5. ACOTACION DEL ERROR

En el apartado anterior se ha visto como:

$$t_H = \left(2 \frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i R_i}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

$$k_i = 1 \text{ para } i=1,\dots,m$$
$$k_i = TE_i/t_H \text{ para } i=m+1,\dots,n \qquad (24)$$

es la solución a la relajación del problema (2) cuando sólo se impone la condición $k_i \geq 1$, eliminando la restricción de integridad. También se ha demostrado que (23) es la solución óptima del problema, si éste se restringe a los m primeros artículos, es decir es la solución del problema:

$$\text{Min. } (S + \sum_{i=1}^{m} s_i/k_i) \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{m} k_i\ h_i\ R_i$$

$$\text{s.a. } k_i \text{ enteros positivos; } i=1,\dots,m \qquad (25)$$
$$t \geq 0$$

La solución propuesta (del problema relajado) no coincide con la solución óptima del problema original (2), debido al "redondeo" en el valor de las multiplicidades $k_i = TE_i/t_H$ de los artículos $i=m+1,\dots,n$ (normalmente no enteras) a los valores k_i = entero (TE_i/t_H).

Llamando al coste originado por el artículo i:

$$C_i(y) = s_i/y + (h_i R_i/2)y$$

es obvio que $y^* = (2s_i/h_i R_i)^{\frac{1}{2}}$, cumpliéndose además:

$$C_i(y) = \frac{1}{2}\, c_i(y^*) \,.\, \left(\frac{y^*}{y} + \frac{y}{y^*} \right) \qquad (26)$$

para cualquier valor de la variable y. En particular, para los artículos $i=m+1,\dots,n$: $y^* = TE_i$, $y=k_i t_H$. La selección de las k_i enteras se realiza escogiendo los valores que satisfagan las relaciones (4) para dichos artículos $i=m+1,\dots,n$.

Por construcción del índice m y definición de t_H resulta que $TE_i > t_H$. Además, según las relaciones (4), se tiene que para aquellos artículos $i=m+1,\dots,n$ cuya multiplicidad:

$$\text{a) } k_i = 1: \quad t_H \leq TE_i \leq \sqrt{2}\ t_H \qquad (27)$$

$$\text{b) } k_i > 1: \quad (k_i(k_i-1))^{\frac{1}{2}}\ t_H \leq TE_i \leq (k_i(k_i+1))^{\frac{1}{2}}\ t_H \qquad (28)$$

Al ser $C_i(y)$ convexa, para acotar el máximo error la evaluamos -según la expresión (26)- er los extremos:

- Para $k_i = 1$:

$$C_i(k_i t_H) \leq \frac{1}{2} C_i(TE_i) \,.\, \max\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) = 1.06 \,.\, C_i(TE_i)$$

- Para $k_i = 2$:

$$C_i(k_i t_H) \leq \frac{1}{2} C_i(TE_i) \,.\, \max\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}, \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 1.06 \,.\, C_i(TE_i)$$

- Para $k_i = 3$:

$$C_i(k_i T_H) \leq \frac{1}{2} C_i(TE_i) \,.\, \max\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{12}}{3} + \frac{3}{\sqrt{12}}\right) = 1.02 \,.\, C_i(TE_i)$$

En general, para $k_i > 1$ se tiene que:

$$C_i(k_i t_H) \leq \frac{1}{2} C_i(TE_i) \,.\, \left(\left(\frac{k_i-1}{k_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{k_i}{k_i-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

pues el máximo error para $k_i > 1$ se produce en el extremo inferior de la acotación (28), exactamente para:

$$TE_i = (k_i(k_i-1))^{\frac{1}{2}} \,.\, t_H$$

Si llamamos C al coste debido a los m primeros artículos, una acotación del error que se obtiene es:

$$\text{Error} \leq \frac{C + \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^{n} C_i(TE_i) \left(\left(\frac{k_i-1}{k_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{k_i}{k_i-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{C + \sum_{i=m+1}^{n} C_i(TE_i)} \qquad \textbf{(29)}$$

sustituyendo $k_i = 2$ para los artículos i=m+1,...,n que les corresponda $k_i = 1$. Situándose en el caso más desfavorable, es decir cuando C sea despreciable y k_i sea 1 ó 2 para todos los artículos posteriores al m, la acotación (29) toma un valor máximo del 6%:

$$\text{Error} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) \simeq 1.06$$

6. EXPERIENCIAS COMPUTACIONALES

Para analizar la eficiencia de la regla que se propone se comparan los resultados de la misma con los de las reglas de Silver /5/ y de Goyal y Belton /6/. Ambos procedimientos pueden considerarse análogos al expuesto anteriormente excepto en lo que se refiere al cálculo del intervalo básico. Así pues, la regla de Silver se puede aplicar sustituyendo el paso 2 de la regla propuesta por la asignación m=1, con lo que el valor del intervalo básico resulta en el paso 3:

$$t = \left(2 \frac{S + s_1}{h_1 R_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

La heurística de Goyal y Belton puede aplicarse, basándose en el procedimiento propuesto, sustituyendo los pasos 2 y 3 por la asignación m=1 y el cálculo de t según:

$$t = \min_i \left(\frac{2(S+s_i)}{h_i R_i} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para el conjunto de datos que se presentan en la tabla 1 (Goyal /4/) correspondientes a un problema en que un producto puede ser empaquetado en 20 tipos diferentes de envases, para cada uno de los cuales son conocidos su coste de lanzamiento incremental (en ptas.), su precio (en ptas./unidad) y su demanda (en unidades/año). La tasa de mantenimiento (en ptas./ /ptas. y año) tiene un valor de 1 y el coste principal de lanzamiento del grupo (en ptas.) es de 45. Nótese que para ser consistentes con la notación definida para este tipo de problemas, el coste de mantenimiento de cada artículo (en ptas./unidad y año) se obtienen como el producto del precio de cada artículo y la tasa de mantenimiento.

Una vez ordenados los artículos según sus tiempos económicos en orden creciente (como aparecen en la tabla 1) se aplican las tres reglas heurísticas.

TABLA 1: Datos del problema ordenados por sus TE_i.

Número de artículos: 20
Coste de lanzamiento: 45
Coste de mantenimiento: 1

Artículo	Coste de Lanzamiento	Precio Unidad	Demanda
1	3	1.20	15.000
2	8	2.00	10.000
3	5	1.00	12.000
4	10	2.00	9.000
5	10	1:50	10.000
6	7	1:25	8.000
7	6	1.00	6.000
8	12	.50	20.000
9	11	.75	12.000
10	10	.80	10.000
11	10	1.30	5.000
12	12	.75	10.000
13	8	1.00	5.000
14	5	1.00	2.500
15	7	1.60	2.000
16	10	1.00	4.000
17	8	1.50	2.000
18	4	2.00	350
19	2	.50	600
20	7	.60	1.000

Los resultados de cada uno de los tres métodos aparecen en las tablas 2 y 3. En la tabla 3 se muestran los valores obtenidos para las multiplicidades de cada artículo por cada una de las reglas, así como los valores óptimos.

TABLA 2.

Resultado de las heurísticas respecto a los valores óptimos.

	Silver	Goyal y Belton	Heurística Propuesta
T inicial:	.0730297	.0728011	.0435026
T final:	.0456860	.0456860	.0456860
Error (%):	59.8513900	59.3510700	4.7791780
Coste inicial:	7891.0210000	7891.0210000	7860.8870000
Coste final:	7857.9780000	7857.9780000	7857.9780000
Error (%):	.4205084	.4205084	.0370220

TABLA 3.

Valores de las multiplicidades.

Artículo	Silver	Goyal y Belton	Heurística Propuesta	Optimos
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1
13	1	1	1	1
14	1	1	2	1
15	1	1	2	2
16	1	1	2	2
17	1	1	2	2
18	2	2	3	2
19	2	2	3	3
20	2	2	4	3

Nótese que aunque los intervalos T iniciales (tabla 2), en años, fijados por las reglas de Silver y de Goyal y Belton son distintos, aunque muy similares para este problema, los valores obtenidos para las multiplicidades k_i (tabla 3) son los mismos debido a la condición de integridad que se impone a dichas k_i. Debido a este hecho el coste inicial resultante de ambas heurísticas (tabla 2) coincide, ya que se calcula exclusivamente a partir de las k_i según (22), aunque el intervalo de partida sea distinto.

Otro aspecto que merece la pena resaltar es que existiendo un error en el coste, para el caso de las heurísticas de Silver y de Goyal y Belton, del 0,42% (tabla 2); el error del intervalo inicial respecto del final -ligeramente inferior para la heurística de Goyal y Belton- es del 59% aproximadamente en ambos casos. Esto es debido a la extremada poca sensibilidad de la curva de costes, ya que un error del 59% de la fijación del intervalo inicial produce un error en los costes del 0.42%; error que en principio parece resultar muy pequeño.

Respecto a la bondad de la regla que se propone para este tipo de problemas, en la tabla 2 se observa como genera un error en el coste del 0.037% y un error en la fijación del intervalo básico del 4.77%; de donde se deduce que, al menos en este primer problema ejemplo, merece la pena tener en cuenta para la fijación del intervalo inicial los 13 primeros artículos en vez de sólo uno, como tienen en cuenta Silver y Goyal y Gelton.

La explicación práctica de las tablas 2 y 3 para la solución de cada heurística y la solución óptima, se particulariza a continuación para la regla de Silver. Se realiza un pedido cada 0.073 años, es decir cada 26 días aproximadamente considerando años de 365 días, en el cual siempre intervienen los 17 primeros artículos que aparecen en la tabla 1. Los tres restantes se solicitan cada dos pedidos consecutivos del grupo, es decir cada 52 días. Las cantidades o lotes que se solicitan para cada artículo se obtienen multiplicando su factor de multiplicidad por el valor del intervalo y por el valor de su demanda. Así por ejemplo, la cantidad solicitada para el artículo número 10 sería $1 \times 0.073 \times 10.000 = 730$ unidades, y para el 18 sería $2 \times \times 0.073 \times 350 = 51$ unidades. Estos lotes cubrirán la demanda de dichos artículos durante 26 y 52 días respectivamente. El coste resultante de esta política es de 7891 ptas.

En el caso de la regla que se propone para este tipo de problemas, el intervalo entre pedidos es de 0.043 años (aproximadamente 15 días), solicitándose en cada pedido los primeros trece artículos; cada dos pedidos los artículos 14, 15, 16 y 17; cada tres pedidos el 18 y 19 y cada 4 el artículo 20. El coste resultante de esta política es de 7860 ptas.

Para el problema resuelto por Kaspi y Rosenblatt /8/ cuyos datos se ofrecen en la tabla 4, ya ordenados por sus tiempos económicos, los resultados se muestran en las tablas 5 y 6.

TABLA 4: Datos del problema 2 ordenados por sus TE_i.

Número de artículos: 6
Coste de lanzamiento: 10.0
Coste de mantenimiento: .2

Artículo	Coste de Lanzamiento	Precio Unitario	Demanda
1	1.2	4	2.750
2	2.0	5	1.850
3	3.1	4	3.200
4	1.8	2	2.900
5	2.7	1	1.400
6	3.2	1	1.600

En este problema, las soluciones propuestas por Silver y por Goyal y Belton coinciden exactamente tanto en el valor del intervalo inicial (0.100905 años) como en el valor de las multiplicidades (tablas 5 y 6). El coste resultante es de 633.845 ptas. Los resultados propuestos coinciden con la solución óptima en el valor de las multiplicidades (tabla 6) y por tanto el error obtenido en el coste, respecto a la solución óptima, es nulo. Por otra parte, el error obtenido en la fijación del intervalo inicial, respecto al óptimo, es de 0.36% frente al 47.28% resultante de la aplicación de las otras dos reglas.

TABLA 5.

Resultados de las heurísticas respecto de los valores óptimos para el problema 2.

	Silver	Goyal y Belton	Heurística Propuesta
T inicial:	.1009050	.1009050	.0682565
T final.	.0685086	.0685086	.0685086
Error (%):	47.2881800	47.2881800	.3679582
Coste inicial:	633.8450000	633.8450000	614.5212000
Coste final:	614.5212000	614.5212000	614.5212000
Error (%):	3.1445180	3.1445180	.0000000

TABLA 6.

Valores de las multiplicidades para el problema 2.

Artículo	Silver	Goyal y Belton	Heurística Propuesta	Optimo
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	2	2
6	1	1	2	2

Para comparar estadísticamente los resultados de las tres heurísticas se han generado aleatoriamente los datos de los artículos, según las siguientes distribuciones uniformes:

- para la demanda de los artículos, valores entre 10 y 5010.
- para el coste de lanzamiento incremental de cada artículo, valores entre 1 y 3.5.
- para el coste de mantenimiento en inventario de cada artículo, valores entre 0.2 y 1.4.

El valor del coste principal de lanzamiento del grupo S se ha hecho variar entre 1 y 30 con paso unitario (es decir, se han considerado treinta valores de S) y para el número de artículos n se han elegido cinco valores (5, 10, 20, 30 y 50 respectivamente). Para cada combinación de los valores de n y S se han generado los datos correspondientes a 100 problemas, como se indica en la tabla 7. Por tanto, el número total de problemas resueltos, aplicando cada uno de los tres procedimientos, ha sido de $5 \times 30 \times 100 =$ $= 15.000$ problemas.

Para cada pareja de valores de n y S se han calculado los resultados obtenidos por cada regla para los 100 problemas generados aleatoriamente (para dichos valores de n y S) en términos del error medio, desviación tipo y error máximo del coste evaluado a partir de la solución inicial propuesta por cada método respecto del coste originado por la solución óptima. Asímismo, para cada par de valores de n y S, se ha obtenido el número de veces en que la solución de cada regla -en términos de costes- ha quedado más próxima a la óptima y el número de veces que la solución de cada heurística ha alcanzado el coste óptimo.

TABLA 7: Datos de los Problemas Generados.

Número de problemas generados: 100

Número de artículos: 5 10 20 30 50

	Valor inicial	Valor Final	Paso
Coste pral. lanzamiento	1.000	30.000	1.000
Demanda	10.000	5010.000	aleatorio
Coste lanzamiento	1.000	3.500	aleatorio
Coste mantenimiento	.200	1.400	aleatorio

Por ser muy extenso el listado de los resultados, se han elegido algunos de los valores de n y S como representativos del total, los cuales aparecen en la tabla 8 en términos de costes.

De la inspección de los resultados en términos de costes mostrados en la tabla 8, se deduce la bondad de la regla que se propone respecto de las reglas de Silver y de Goyal y Belton, incluso para valores de S pequeños (por ejemplo 1) respecto a los valores del coste de lanzamiento de los artículos s_i, que varían aleatoriamente entre 1 y 3.5 (tabla 7), independientemente del valor del número de artículos n. Cuando aumenta el valor de S haciéndose más significativo respecto a los valores de s_i, el número de veces en que el coste de la solución propuesta está más cercano al óptimo y lo alcanza se mantienen, mientras que para las otras dos reglas disminuyen ambos. Véanse los resultados respecto al coste final en la tabla 8 para los valores de S igual a 30. Si además el valor de n aumenta, el resultado de considerar más de un artículo en la determinación del intervalo básico inicial, se hace notar aún más en el número de veces en que el coste proporcionado por la heurística, respecto al coste óptimo, es más próximo y es alcanzado (tabla 9, para S = 25).

TABLA 8: Resultados de las heurísticas en términos de costes respecto a la solución óptima.

n	S	Heur.	Error Medio	Desviación Tipo	Error Máximo	Coste Final Núm. de veces Mas prox.	Alcanz.
5	1.0	Silv	.0950%	.2825%	1.8300%	91	72
		G&B	.0955%	.2826%	1.8300%	91	72
		Prop	.0859%	.2546%	1.8300%	93	68
5	10.0	Silv	.2361%	.4431%	2.1985%	56	55
		G&B	.2207%	.4238%	2.1985%	57	56
		Prop	.0070%	.0328%	.2749%	95	91
5	20.0	Silv	.0745%	.1805%	1.0061%	73	73
		G&B	.0745%	.1805%	1.0061%	73	73
		Prop	.0007%	.0053%	.0514%	99	98
5	30.0	Silv	.0667%	.1707%	.9057%	71	71
		G&B	.0667%	.1707%	.9057%	71	71
		Prop	.0000%	.0005%	.0047%	100	99
20	1.0	Silv	.2060%	.2662%	1.5220%	51	15
		G&B	.1906%	.2468%	1.5220%	52	18
		Prop	.1884%	.2623%	1.5220%	60	12
20	10.0	Silv	1.4165%	.8283%	3.5186%	0	0
		G&B	1.2227%	.7164%	2.9138%	0	0
		Prop	.0181%	.0356%	.2000%	100	49
20	20.0	Silv	1.3673%	.6896%	3.5538%	2	1
		G&B	1.2402%	.6122%	3.0574%	2	1
		Prop	.0181%	.0251%	.1600%	98	71
20	30.0	Silv	1.0588%	.6255%	3.0738%	4	4
		G&B	.9581%	.5343%	2.2597%	4	4
		Prop	.0027%	.0084%	.0501%	100	78
50	1.0	Silv	.1668%	.2474%	1.1025%	41	21
		G&B	.1639%	.2434%	1.1025%	45	17
		Prop	.1586%	.2453%	1.0694%	59	4
50	10.0	Silv	2.3475%	.7523%	4.0862%	0	0
		G&B	2.0177%	.6780%	3.5917%	0	0
		Prop	.0465%	.0616%	.3106%	100	14
50	20.0	Silv	2.9052%	.7837%	4.8277%	0	0
		G&B	2.6938%	.6915%	4.8277%	0	0
		Prop	0.165%	.0330%	.2717%	100	27
50	30.0	Silv	2.6592%	.7332%	4.5921%	0	0
		G&B	2.5246%	.6810%	4.0411%	0	0
		Prop	.0091%	.0168%	.1009%	100	35

Nº de problemas generados: 100 por cada pareja (n,S)

TABLA 9: Resumen en términos de Costes para S=25.

n	Heurística	Número de veces Más próximo	 Alcanzado
5	Silver	71	71
	G&B	72	72
	Prop.	99	98
10	Silver	24	24
	G&B	25	25
	Prop.	100	99
20	Silver	0	0
	G&B	0	0
	Prop	100	76
30	Silver	0	0
	G&B	0	0
	Prop	100	56
50	Silver	0	0
	G&B	0	0
	Prop	100	32

Respecto al error medio originado por el coste de la solución de cada método frente al coste óptimo, en la tabla 8 se observa como para cualquier pareja de valores n y S, el error medio más pequeño corresponde a la heurística propuesta, estando además menos disperso alrededor del coste mínimo. Con respecto al error máximo, su valor mayor (1.52%) se produce para n = 20 y S = 1 (tabla 8) coincidiendo en ese caso con el producido en el conjunto de problemas para las otras dos reglas. En cualquier caso, para cualquier combinación de los valores de n y S estudiados, el error máximo producido por el método que se propone es menor o igual que el producido por los de Silver y de Goyal y Belton. Así pues, en términos de costes, la regla propuesta produce menor error medio, menor desviación tipo y menor error máximo que las otras dos reglas heurísticas con las que se compara.

Este resultado queda aún más patente al analizar en la tabla 10 el cuadro resumen de los resultados de los tres métodos en términos de costes. Según se observa en dicha tabla, de los 15.000 problemas resueltos, el 59.56% de las veces la solución, respecto al coste, obtenida por la heurística propuesta coincide con la óptima, frente al 17.72% de la solución propuesta por Silver y al 18.24% de Goyal y Belton. Por otra parte, el 95.65% de las veces la regla que se propone ha originado un coste menor o igual que los demás, frente al 20.43% y al 21.29% de Silver y de Goyal y Belton respectivamente.

Si se realiza el análisis anterior en lugar de respecto al coste, respecto al valor del intervalo inicial fijado por cada una de las tres heurísticas (tabla 11), se observa que las conclusiones se repiten pero en un orden de magnitud bastante mayor. Así por ejemplo, el máximo error medio obtenido por la regla de Silver, en términos de costes, es del 2.90%, con un error máximo del 4.82% para n = 50 y S = 20 (tabla (8); mientras que en términos del intervalo básico fijado inicialmente el máximo error medio producido por el método de Silver es del 141.59% para n = 50 y S = 28, siendo el error máximo correspondiente del 206.22%, que no aparece en la tabla 11.

TABLA 10: CUADRO RESUMEN DE COSTES.

Número de problemas resueltos: 15000

Heurística	Respecto al Coste Final Número de veces: Más próximo	Respecto al Coste Final Número de veces: Alcanzado
Silver	3065 [20.4333%]	2658 [17.7200%]
G&B	3194 [21.2933%]	2736 [18.2400%]
Propuesta	14348 [95.6533%]	8934 [59.5600%]

El error medio obtenido por la regla propuesta es, para n=50 y S=20 en términos de coste, del 0.01% y el error máximo el 0.27%. Respecto al intervalo inicial, para n=50 y S=28 el error medio producido por la heurística propuesta es 2.56% (frente al 141.59% de Silver y el 125.26% de Goyal y Belton) y el error máximo de 9.38% (frente al 206.22% de Silver y el 161.05% de Goyal y Belton).

El máximo valor del error máximo se produce en la regla que se propone para n=50 y S=1, siendo de 39.87% (tabla 11). En el caso del método de Silver, dicho valor máximo es 214.50% para n=50 y S=29. Para la heurística de Goyal y Belton, el máximo error máximo es 161.05% para n=50 y S=28.

El orden de magnitud en los errores en términos del intervalo básico es mayor que en términos de costes debido a que la curva de costes es muy poco sensible. Por esta razón, una variación en la fijación del intervalo relativamente grande respecto al óptimo produce un incremento en la función de costes relativamente pequeño.

TABLA 11: Resultados de las heurísticas en términos del intervalo fijado respecto a la solución óptima.

n	s	Prop	Error Medio	Desviación Tipo	Error Máximo	Intervalo Final Nº de veces	
						Más prox.	Alcanz.
5		Silv	6.8064%	5.3892%	28.7293%	66	0
		G&B	6.7212%	5.3313%	28.7293%	67	0
		Prop	6.3654%	4.6644%	21.7010%	67	0
5	10.0	Silv	29.8673%	16.3533%	76.8401%	3	0
		G&B	26.4517%	11.8715%	60.5718%	3	0
		Prop	1.9796%	2.0155%	8.8378%	99	6
5	20.0	Silv	41.1785%	21.5286%	111.8154%	0	0
		G&B	35.9188%	13.9740%	66.7632%	0	0
		Prop	.7325%	.8362%	3.2663%	100	25
5	30.0	Silv	49.2967%	24.2113%	118.6557%	0	0
		G&B	42.5579%	16.2558%	79.2008%	0	0
		Prop	.4586%	.5909%	2.3226%	100	38
20	1.0	Silv	10.9414%	8.3006%	35.4427%	51	0
		G&B	10.2564%	7.4477%	30.8615%	52	0
		Prop	9.6732%	5.6521%	23.3567%	48	0
20	10.0	Silv	61.6140%	19.8104%	107.0472%	0	0
		G&B	52.0102%	12.3836%	86.4107%	0	0
		Prop	3.6302%	2.4955%	12.1513%	100	0
20	20.0	Silv	89.5696%	19.8104%	141.2414%	0	0
		G&B	78.0789%	12.2008%	108.6374%	0	0
		Prop	2.1132%	1.5787%	7.1828%	100	0
20	30.0	Silv	113.4120%	29.7900%	186.0888%	0	0
		G&B	94.0603%	15.8613%	131.7657%	0	0
		Prop	1.4462%	1.1296%	6.7864%	100	0
50	1.0	Silv	9.5459%	9.2077%	40.9445%	60	0
		G&B	9.3722%	8.8521%	40.9495%	59	0
		Prop	11.1325%	7.1542%	39.8703%	35	0
50	10.0	Silv	76.8489%	17.3966%	133.9932%	0	0
		G&B	66.6890%	11.6960%	94.1138%	0	0
		Prop	5.3987%	3.2455%	16.2854%	100	0
50		Silv	117.9405%	20.3705%	177.8065%	0	0
		G&B	103.9389%	12.5141%	141.5555%	0	0
		Prop	3.0798%	1.9781%	10.4729%	100	0
50	30.0	Silv	138.2252%	23.8498%	205.9942%	0	0
		G&B	124.3475%	13.5628%	159.5186%	0	0
		Prop	2.4189%	1.5686%	7.3370%	100	0

TABLA 12: CUADRO RESUMEN DE TIEMPOS.

Nũmero de problemas resueltos: 15000

Heurística	Respecto al Intervalo Final Número de veces:	
	Más próximo	Alcanzado
Silver	733 (4.8867%)	0 (.0000%)
G&B	804 (5.3600%)	0 (.0000%)
Propuesta	14311 (95.4067%)	540 (3.6000%)

En la tabla 12 se muestra como el intervalo básico inicial fijado por la regla propuesta es más próximo al intervalo óptimo (en valor absoluto) el 95.40% de las veces, mientras que el determinado por Silver sólo es más cercano al final el 4.88% de las veces y el de Goyal y Belton el 5.36% de las veces. También se observa como la heurística que se propone fija de entrada el intervalo óptimo en 540 problemas de los 15.000 resueltos. Las otras dos reglas no aciertan con el valor del intervalo óptimo ni una sola vez.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

/1/ SHU, F.T.: "Economic Ordering Frequency for Two Items Jointly Replenished", Management Sci., Vol. 17, (1971), pp. B406-B410.

/2/ NOCTURNE, D.J.: "Economic Ordering Frequency for Several Items Jointly Replenished", Management Sci., Vol. 19, (1973), pp. 1093-1096.

/3/ GOYAL, S.K.: "Scheduling a Multi-Product Single-Machine Systems", Operations Res. Quart., Vol. 24, (1973), pp. 261-269.

/4/ GOYAL, S.K.: "Determination of Optimum Packging Frequency of items Jointly Replenished", Management Sci., Vol. 21, (1974), pp. 436-443.

/5/ SILVER, E.A.: "A Simple Method of Determining Order Quantities in Joint Replenishments Under Deterministic Demand", Management Sci. Vol.22, (1976), pp.1351-1361.

/6/ GOYAL, S.K. & BELTON, A.S.: "On A Simple Method of Determining Order Quantities in Joint Replenishments Under Deterministic Demand", Management Sci. Vol.25, (1979), 604.

/7/ ONIEVA, L.: "Determinación del Lote en Artículos Sujetos a Ordenes Conjuntas y Otros Tipos de Ligaduras. Métodos de Solución y Algoritmos", Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 1985.

/8/ KASPI, M. y ROSENBLATT, M.J.: "An Improvement of Silver's Algorithm for the Joint Replenishment Problem", IIE Transactions. Vol.15, (1983) 264-267.