QÜESTIIÓ, Vol 12, nº 2, pp. 175-208, 1988

PROBLEMAS DE KNAPSACK 0-1 CON UNA RESTRICCIÓN ADICIONAL

J. BARCELÓ y E. FERNÁNDEZ

Universidad Politécnica de Cataluña

En este artículo se estudian los problemas de Knapsack con una restricción adicional. Este estudio viene motivado por la aparición de problemas con esta estructura en la formulación de distintas relajaciones lagrangianas asociadas a problemas enteros. Hemos considerado dos tipos de problemas: unos tienen las dos restricciones del mismo sentido, mientras que los otros las tienen de distinto sentido. Para ambos tipos de problemas presentamos algoritmos de enumeración implícita para su resolución así como heurísticas para la obtención de soluciones posibles. Hemos comprobado la eficiencia de los procedimientos propuestos realizando una amplia experiencia computacional cuyos resultados presentamos.

Knapsack problems with a side constraint.

Keywords: Knapsack, lagrangian relaxation, implicit enumeration.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se estudian los problemas de knapsack con una restricción adicional. Estos problemas son un caso particular de programas multi-knapsack, en los que el conjunto de restricciones consta de dos desigualdades. A diferencia de los clásicos problemas de knapsack, que han sido ampliamente estudiados, tanto desde un enfoque poliédrico [CrJo83] como desde un punto de vista algorítmico [MaTo79,MaTo88,GiGo61], el interés suscitado por los problemas de knapsack con más de una restricción ha sido bastante limitado, aunque existen distintos trabajos en los que se estudian estos problemas, en el caso que todas las desigualdades tengan el mismo signo, desde una perspectiva general [Ema86,FrPl86,GaPi85,Shih79].

-Jaume Barceló i E. Fernández - Dpt. Estadística i Investigació Operativa. Facultat d'Informàtica - Universitat Politècnica de Catalunya - Pau Gargallo 5-08028 Barcelona
-Article rebut el juliol de 1988

Nuestro estudio viene motivado por la aparición de este tipo de problemas en algunas de las relajaciones lagrangianas que se han formulado para resolver distintos problemas enteros. Por ejemplo, en [BaFe88,Fer88] se aplica una variante del algorismo BISA [Barci85,BaHo88] de refuerzo dual para la resolución de problemas de Set Partitioning en la que los problemas duales que se resuelven tienen una estructura de problemas de knapsack con dos restricciones. Asimismo, en los problemas de localización de plantas con restricciones de capacidad [BaFeJö86,BaJöMi87] y en los problemas de spanning trees minimales sometidos a restricciones complementarias [BaJöMi87], algunas de las relajaciones lagrangianas, que se obtienen al incorporar a la función objetivo distintas familias de restricciones, también tienen una estructura de problemas de knapsack con dos restricciones, que coincide con alguno de los dos tipos de problemas que hemos estudiado.

El objetivo que perseguimos es el diseño de algún algoritmo eficiente para la resolución de estos problemas, que aproveche al máximo la estructura particular de los mismos. En particular, hemos estudiado dos clases de problemas; en la primera cada una de las restricciones es una desigualdad de distinto sentido, mientras que en la segunda, las dos inecuaciones son del mismo sentido. Los dos tipos de problemas que hemos estudiado son, respectivamente, de la forma:

$$(KP1) \quad \begin{array}{l} \min dx \\ cx \geq c_0 \\ gx \leq g_0 \\ x_j \in \{0,1\}, J \in N \end{array} \qquad\qquad (KP2) \quad \begin{array}{l} \min dx \\ cx \geq c_0 \\ gx \geq g_0 \\ x_j \in \{0,1\}, j \in N \end{array}$$

donde, en $(KP1), c, g \in R^{n+}, d \in R^n$; mientras que en $(KP2), c, g \in R^n, d \in R^{n+} y c_0, g_0 \in R^+$, siendo N el conjunto de índicies de las variables.

Desde una perspectiva general los trabajos [Ema86,FrPl86,GaPi85,Shih79] que estudian los problemas de multi-knapsack imponen condiciones sobre los valores numéricos de los coeficientes que resultan excesivamente restrictivas tanto para $(KP1)$ como para $(KP2)$. En concreto suelen imponer restricciones de integridad y de no negatividad sobre los coeficientes. Además, suponen que las restricciones que aparecen son todas del mismo sentido.

Las restricciones de integridad sobre los coeficientes pueden, teóricamente, superarse, multiplicando todos ellos por una potencia de 10 suficientemente grande. Sin embargo, se trata de una solución que presenta inconvenientes, ya que cuando necesitemos una precisión alta para la parte no entera de los coeficientes, el factor que se les debe aplicar resulta excesivamente grande dando lugar a problemas de almacenamiento. Si, por el contrario, limitamos la magnitud del factor a aplicar, el problema resultante no es un problema equivalente al original dando lugar a resultados erróneos. Lo anterior se manifiesta especialmente al resolver de forma iterativa una sucesión de problemas similares, como ocurre en la resolución via optimización subgradiente de los problemas duales asociados a relajaciones lagrangianas, en los que, de una iteración a otra, algunos coeficientes varían ligeramente y además el reconocimiento de ciertas propiedades numéricas resulta determinante para la identificación de la solución óptima.

Las restriciones de no negatividad que suelen imponerse a los coeficentes resultan no superables en el ámbito de aplicaciones a distintas formulaciones de relajaciones lagrangianas de nuestro trabajo. Tengamos en cuenta que, cuando una de las variables tenga un coeficiente negativo, sólo será posible hacer una transformación a un problema equivalente en el caso de que los otros dos coeficientes que aparecen en el problema también sean negativos. Evidentemente, se trata de una restricción excesiva que a menudo no podremos garantizar.

En otro orden de cosas, y debido a que el conjunto de restricciones en los problemas $(KP1)$ y $(KP2)$ está formado por dos únicas desigualdades, parece conveniente intentar obtener el mayor rendimiento posible de la estructura específica que presentan estos dos tipos de problemas. Ello justifica el enfoque algorítmico que hemos seguido, al diseñar algoritmos específicos para los problemas $(KP1)$ y $(KP2)$, que sacan partido de la esructura original de los mismos.

Este artículo se estructura en 4 partes; en las dos primera estudiamos los problemas $(KP1)$ y $(KP2)$ respectivamente, presentando cotas inferiores y algoritmos de enumeración implícita para cada uno de dichos problemas. En la tercera, estudiamos la aplicación de estas técnicas a la resolución de ciertas relajaciones lagrangianas cuyas formulaciones se coresponden con las de los problemas $(KP1)$ y $(KP2)$ y definimos heurísticas ligadas a dichas formulaciones. Finalmente en el cuarto apartado presentamos los resultados computacionales que hemos obtenido utilizando los algoritmos y las heurísticas propuestos en los apartados anteriores.

2. PROBLEMAS CON DOS RESTRICCIONES DE SENTIDO CONTRARIO

Consideremos ahora un problema de la forma

$$
(KP1) \quad \begin{array}{l} \min dx \\ cx \geq c_0 \\ gx \leq g_0 \\ x_j \in \{0,1\}, j \in N, \end{array}
$$

donde $c, g \in R^{n+}, d \in R^n$.

Intuitivamente resulta evidente que si el conjunto de todas las variables que tienen un coeficiente de coste negativo, formase una solución posible, esta solución sería óptima para el problema. En particular, una solución óptima deberá contener el mayor número posible de estas variables.

Teniendo en cuenta que la segunda restricción es la que limita el número de variables con coeficiente d_j negativo que podemos incluir en una solución, reordenamos el conjunto de índices de dichas variables, colocando en primer lugar las que resultan más "prometedoras". En concreto, una de estas variables resulta más sugerente en la medida que su coeficiente d_j sea menor (mayor en valor absoluto) y su coeficiente g_j también lo sea. Sea $N^1 = \{1, ..., p\}$ el conjunto de dichos índices ordenado según valores crecientes de d_j/g_j. Por otro lado, la primera restricción puede obligar a introducir en la solución alguna variable con d_j positivo. Por este motivo, deberemos ordenar los índices de variables con $d_j \geq 0$ poniendo en primer lugar las que resulten menos "perjudiciales". En concreto, una de estas variables resulta peor candidata para formar parte de una solución en la medida en que d_j sea mayor y su coeficiente C_j menor. Sea $N^2 = \{P+1, ..., n\}$ el conjunto de dichos índices ordenado según valores crecientes de los cocientes d_j/c_j.

Consideramos, por tanto, el conjunto N de índices de todas las variables ordenado de forma que primero aparecen los índices de las variables con coeficiente d_j negativo, según la ordenación de N^1 y después los de las variables con d_j positivo, según la ordenación de N^2.

CÁLCULO DE COTAS INFERIORES

A continuación damos dos cotas inferiores para $(KP1)$. Estas cotas se obtienen al considerar los problemas relajados resultantes de eliminar una de las restricciones de $(KP1)$ manteniendo la otra.

Proposición 1: Sea $N^1 = \{1, ..., p\}$ el conjunto de índices definido anteriormente, entonces $z^1_{\inf} = \sum_{j=1}^{s_1+1} d_j x^*_j$ es una cota inferior para $(KP1)$ siendo s_1 el último índice del conjunto ordenado N^1 para el que $\sum_{j=1}^{s_1} g_j \leq g_0$ y $x^* \in R^n$ el vector de componentes

$$x^*_j = \begin{array}{ll} 1 & \text{si } 1 \leq j s_1 \\ (g_0 - \sum_{j \leq s_1} g_j)/g_{s_1+1} & \text{si } j = s_1 + 1 \text{ y } s_1 1 \leq p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array}$$

Demostración: Sea el problema

$$\begin{array}{ll} (RL1) & \min dx \\ & gx \leq g_0 \\ & 0 \leq x_j \leq 1, j \in N. \end{array}$$

x^* es una solución óptima para $(RL1)$ y z_{inf}^1 es su valor de la función objetivo. Como $(RL1)$ es una relajación de $(KP1)$, es evidente que z_{inf}^1 es una cota inferior del valor óptimo de $(KP1)$.

En el caso en el que x^* satisfaga también la segunda restricción, se tienen el siguiente corolario:

Corolario 1: Sea x^* definido como en la Proposición 1. Si

$$\sum_{j=1}^{s_1+1} c_j x_j^* \geq c_0$$

entonces, x^* es un ópitmo del problema

$$\begin{array}{ll} (RL) & \min dx \\ & cx \geq c_0 \\ & gx \leq g_0 \\ & 0 \leq x_j \leq 1, j \in N. \end{array}$$

Nótese que (RL) es la relajación lineal ordinaria de $(KP1)$

Evidentemente, en la situación del corolario anterior si todas las componentes de x^* son enteras, x^* es un óptimo de $(KP1)$. Hay que resaltar que todas las componentes de x^* serán enteras en uno de los siguientes casos:

$$\text{i)} s_1 = p$$

$$\text{ii)} s_1 \leq p \text{ y } \sum_{j=1}^{s_1} g_j = g_0$$

Consideremos ahora el problema lineal

$$\begin{array}{ll} (RL2) & \min dx \\ & cx \geq c_0 \\ & 0 \leq x_j \leq 1, j \in N. \end{array}$$

Proposición 2: Sean $N = \{1, ..., p, ..., n\}$ y $N^2 = \{p+1, ..., n\}$ los conjunto de índices de variables definidos anteriormente, entonces:

$z_{\text{inf}}2 \sum_{j=1}^{s_2+1} d_j x_j^*$ es una cota inferior para $(KP2)$ siendo $s_2 + 1$ el último índice del conjunto ordenado N^2 para el que $\sum_{j=1}^{s_2+1} c_j \geq g_0$ y $x^* \in R^n$ el vector de componentes

$$x_j^* = \begin{cases} 1 & \text{si } j \leq p \\ 1 & \text{si } p < j \leq s_2 \\ (c_0 - \sum\limits_{j \leq s_2} c_j)/c_{s2+1} & \text{si } j =, s_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración: El vector x^* es una solución óptima del problema $(RL2)$ y z^2_{inf} el valor de esta solución; por lo tanto se trata de una cota inferior para $(KP1)$.

Corolario 2: Sea X^* como en la Proposición 2. Si $\sum\limits_{j=1}^{s_2+1} g_j x_j^* \leq g_0$ entonces x^* es óptimo para (RL).

Corolario 3: $z_{\text{inf}} = \max\{z^1_{\text{inf}}, z^2_{\text{inf}}\}$ es una cota inferior para $(KP1)$.

Una observación importante es que, en el caso que el índice s_1 asociado a z^1_{inf} sea iguall a p, si la solución x^* definida en la Proposición 1 no satisface la primera restricción de $(KP1)$, entonces el índice s_2 asociado a z^2_{inf} será estrictamente mayor que p, con lo que la cota inferior z^2_{inf} obtenida en la Proposición 2 será estrictamente mayor que z^1_{inf}. No puede asegurarse que esto vaya a ser cierto en el caso en el que $s_1 < p$, puesto que la suma de los coeficientes de coste de las variables $s_1 + 1$ hasta p puede ser, el valor absoluto, mayor que la suma de los coeficientes de coste de las variables desde $p + 1$ hasta s_2, en cuyo caso la cota z^2_{inf} será menor que z^1_{inf}.

Tanto z^1_{inf} como z^2_{inf} pueden reforzarse teniendo en cuenta las condiciones de integridad de las variables de forma análoga a la de Martello y Toth[MaTo79] para problemas con una restricción. En concreto, en el caso de z^1_{inf}, teniendo en cuenta que x_{s1+1} no puede tomar un valor fraccional, la solución óptima del problema entero asociado $(RL1)$ puede obtenerse a partir de la solución óptima X^* de $(RL1)$ bien eliminando el elemento s_1−ésimo $(x_{s1+1} = 0$, bien insertándolo $(x_{s1+1} = 1)$.

En el primer caso, el valor de la solución del problema entero asociado a $(RL1)$ no puede ser inferior a

$$b_1 \sum_{j=1}^{s_1} d_j + \lceil (g_0 - \sum_{j \leq s_1} g_j) d_{s_1+2}/g_{s_1+2} \rceil$$

donde $\lceil x \rceil$ indica la parte entera por exceso de x.

En el segundo caso, teniendo en cuenta que será necesario eliminar alguna de las $s_1 - 1$ primeras variables el mejor valor posible de la solución vendrá dado por:

$$b_2 = \sum_{j=1}^{s_1} d_j + \lceil d_{s_1+1} - \left(g_{s_1+1} - \left(g_0 - \sum_{j/leq s_1} g_j \right) \right) d_{s_1}/g_{s_1} \rceil$$

donde se supone que la variable que ha sido eliminada tiene exactamente el menor coeficiente necesario g_j (es decir $g_{s1+1} - (g_0 - \Sigma g_j))$ y el peor valor posible de d_j/g_j (es decir d_{s1}/g_{s1}). Por tanto la cota z^1_{inf} podrá reforzarse a max $\{b_1, b_2\}$. Análogamente podemos reforzar z^2_{inf}.

Hay que resaltar que, como veremos posteriormente, este procedimiento, a pesar de su sencillez, produce cotas inferiores de una calidad apreciable, obteniendo en ocasiones la solución óptima.

El procedimiento anterior, aplicado a los problemas obtenidos al fijar x_j respectivamente a 0 ó 1 en $(KP1)$, permite obtener dos cotas asociadas a cada variable. En concreto, para cada variable x_j definimos los siguientes subproblemas asociados.

$$\begin{aligned}
(KP1_j) \qquad & \min \sum_{k \in M\{j\}} d_k x_k \\
& \sum_{k \in M\{j\}} c_k x_k \geq c_0 - c_j \\
& \sum_{k \in M\{j\}} g_k x_k \leq g_0 - g_j \\
& x_k \in \{0, 1\}, k \in M\{j\} \\
(KP0_j) \qquad & \min \sum_{k \in M\{j\}} d_k x_k \\
& \sum_{k \in M\{j\}} c_k x_k \geq c_0 \\
& \sum_{k \in M\{j\}} g_k x_k \leq g_0 \\
& x_k \in \{o, 1\}, k \in M\{j\}
\end{aligned}$$

Sean $z0_j$ y $z1_j$ las cotas inferiores obtenidas por el procedimiento anterior para $(KP0_j)$ y $(KP1_j)$ respectivamente. Nótese que $\forall j \leq s + 1$ $z1_j = z_{\text{inf}}$ y $\forall j \geq +1$ $z0_j = z_{\text{inf}}$ donde $s = \max\{s_1, s_2\}$. El conocimiento de estas cotas nos permitirá establecer un criterio de fijación de variables a 0 ó a 1.

ALGORITMO DE ENUMERACIÓN IMPLÍCITA

A continuación proponemos un algoritmo de enumeración implícita para $(KP1)$. Suponemos que el conjunto de índices de variables está ordenado de forma que aparecen primero los índices de variables con d_j negativo, en el mismo orden que para el cálculo de las cotas inferiores, y después los correspondientes a las de d_j positivo; ahora, estos índices están ordenados según orden creciente de coeficiente d_j. El criterio que hemos seguido es el de construir soluciones a partir de subsoluciones parciales, a las que imponemos siempre cumplir la segunda restricción.

A partir de una subsolución parcial se intenta completar una solución fijando a 1 la siguiente variable, que no haya sido previamente considerada, que no haga violar la segunda restricción y cuyo coeficiente d_j, en caso de ser no negativo, no haga que el valor de la función objetivo asociado sea mayor que el valor de la incumbente. Si la nueva subsolución satisface la primera restricción, habremos obtenido una nueva incumbente, en caso contrario se siguen añadiendo variables.

Si la inclusión de una variable candidata x_k hace violar la 2ª restricción, elegimos otra variable candidata x_j que sea posterior a k y cuyo coeficiente g_j sea menor que g_k; en caso que ésta no exista haremos backtracking. Para ello, asociado a cada variable j definimos $\text{ming}_j = \min\{k > j / d_k < g_j\}$.

Si la inclusión en la solución parcial de una variable k, cuyo coeficiente d_k es positivo, produce que el valor de la función objetivo parcial supere el de la incumbente, también se hace backtracking, ya que cualquier variable posterior tiene un coeficiente de coste al menos tan grande como d_k.

En el caso de variables de coeficiente d_j negativo, éstas se van añadiendo a la solución parcial mientras no se viole la segunda restricción. Hay que tener en cuenta que, en este caso, aún cuando se llegue a satisfacer la primera restricción, podríamos mejorar el valor de la incumbente añadiendo tantas variables con d_j negativo como sea posible sin violar la segunda restricción.

En todo momento podemos saber si es posible llegar a satisfacer la primera restricción añadiendo variables adicionales, independientemente de que se vaya a violar la segunda o no. Si esto no va a ser posible también haremos backtracking. Para ello asociado a cada variable j definimos

$$\text{sumc}_j = \sum_{k \geq j} c_k.$$

Cuando sea preciso efectuar backtrackcing, si éste se debe a que se va a superar el valor de la incumbente, a que no va a poder satisfacerse la primera restricción, a que no exista ninguna variable candidata para completar la solución, o bien a que se haya completado una solución posible cuya última componente tenga un coeficiente d_j positivo, eliminaremos de la solución parcial todas aquellas variables correlativas en orden decreciente a la última que se haya introducido. Debido a la ordenación que tenemos, en ninguno de estos casos podrá mejorarse el valor de la incumbente con alguna solución que contenga alguna colección de variables formada por, exactamente, las mismas primeras variables y alguna subcolección de las variables correlativas que aparecen al final. Nótese que esta eliminación de varias variables a la vez puede acelerar considerablemente la exploración.

No podremos realizar la elimiñación anterior cuando se haga backtracking porque no exista ninguna variable que se pueda añadir y siga cumpliendo la segunda restricción; en este caso, eliminaremos de la solución parcial únicamente la última variable introducida en la misma.

Tenemos, además, el siguiente criterio de eliminación de variables:

Sean $z0_j$ y $z1_j$ las cotas inferiores asociadas a la variable x_j y z_{sup} el valor de la incumbente

Si $z0 \geq z_{\text{sup}} \Longrightarrow x_j = 1,$	(cualquier solución que no la contenga tendrá un valor de la función objetivo por lo menos tan grande como el de la incumbente.)
Si $z1_j \geq z_{\text{sup}} \Longrightarrow x_j = 0$	(cualquier solución que la contenga tendrá un valor de la función objetivo por lo menos tan grande como el de la incumbente)

Debemos resaltar que la aplicación de este criterio de eliminación, a menudo reduce la dimensión del problema original sensiblemente, siendo en cualquier caso mejor que los criterios de eliminación clásicos para problemas enteros generales con variables 0 ó 1.

Suponemos que inicialmente conocemos una solución posible y que, por tanto, disponemos de una cota superior, mejor que ∞. Además, el conocimiento de esta cota superior nos pemite aplicar inicialmente los tests de eliminación de variables expuestos. Posteriormente propondremos una heurística para $(KP1)$, especialmente adecuada para problemas con características numéricas similares a las de algunas de las relajaciones lagrangianas mencionadas en la introducción.

La exploración terminará cuando se hayan examinado implícitamente todas las posibles soluciones. Es decir, cuando no exista ninguna posible solución que mejore el valor de la incumbente, o bien cuando se encuentre una incumbente con un valor igual al de la cota inferior. A continuación exponemos un esquema de dicho algoritmo:

Notación:

n	Número total de variables que intervienen en el problema
ultneg	Índice de la última variable con coeficiente de coste negativo
$\text{ming}_j = \min\{k > j / g_k < g_j\}$	Índice de la primera variable posterior a j con un coeficiente en la segunda restricción menor que el de x_j
$\text{sumc}_j = \sum_{k \geq j} c_k$	Suma de los coeficientes de la primera restricción correspondientes a variables con índice igual o posterior a j
$\text{sumd}_{-j} = \sum_{k=1}^{\text{ultneg}} d_k$	Suma de los coeficientes de coste de las variables que lo tengan negativo y con índice igual o posterior a j
xp	Vector cuyas componentes fijadas a 1 indican los índices de las variables que forman parte de una subsolución parcial.
$r1 = \sum_{j=1}^{n} c_j xp_j$	Valor de las primera restricción para una subsolución parcial xp
$r2 = \sum_{j=1}^{n} g_j xp_j$	Valor de la segunda restricción para una subsoslución parcial xp
$fp = \sum_{j=1}^{n} d_j xp_j$	Valor de la función objetivo para una subsoslución parcial xp
$\text{ampli}(xp, j)$	Test lógico que indica si xp es ampliable en la componente j. Es decir si al hacer $xp_j = 1$ la solución parcial resultante cumple i) $r2 \leq g_0$ No viola 2ª restricción) ii) $fp + \text{sumd}j <$ incumb (Puede mejorar el valor de la incumbente)

Algoritmo

Inicialización

Calcular Incumb — *Valor de la cota superior obtenido con una heurística*

Si incumb $\leq z_{\text{inf}}$ **Terminar** — *La solución asociada a la incumbente es óptima*

Aplicar test de eliminación de variables

Para $j = 1, n$ **Hacer** $xp_j = 0$ — *Se empieza con la subsolución parcial vacía*

$r1 \longleftarrow 0$

$r2 \longleftarrow 0$

$fp \longleftarrow 0$

$j \longleftarrow 1$

fin = falso

Fin Inicialización

Mientras no fin **Hacer**

Ampliar subsolución parcial xp

Si $r1 \geq c_0$ **y** $r2 \leq g_0$ **y** $fp <$ incumb — *xp es una solución posible mejor que la incumbente*

Actualizar solución incumbente

Si $fp + \text{sumd}_j \geq$ Incumb — *xp no puede completarse mejorando el valor de la incumbente*

Hacer Backtracking 1

En otro caso si $r1 +$ $\text{sumc}_j < c_0$ — *xp no se puede completar satisfaciendo la 1ª restricción*

Hacer Backtraking 1

En otro caso si $r2 + \text{ming}_j > g_0$ — *Cualquier ampliación dexp viola la 2ª restricción*

Hacer Backtracking2

Fin si

Fin mientras

En el esquema anterior, backtracking 1 y bactracking 2 son los pasos de retroceso antes mencionadods. Además para una mayor claridad en la exposición suponemos que las cantidades $fp, r1$ y $r2$, asociadas a una solución parcial xp están en todo momento, debidamente actualizadas.

El procedimiento anterior termina, bien cuando se tenga una incumbente menor o igual que la cota inferior z_{inf}, ya que la solución asociada a dicha incumbente será óptima, bien cuando en algunos de los pasos de eliminación de variables se detecte que no existe posibilidad de retroceder ni de encontrar ninguna variable candidata; en este caso, la solución que haya proporcionado la incumbente que se tenga en ese momento será óptima.

El procedimiento ampliar subsolución parcial xp es el siguiente:

Ampliar subsolución parcial xp
  Buscar $kl \geq j$ tal que ampli(xp, k) sea cierto
  Hacer $xp_k \longleftarrow 1$
  $j \longleftarrow k+1$

  Fin Hacer
  Mientras ampli(xp, j) sea cierto **Hacer**
  $xp \longleftarrow 1$
  $j \longleftarrow 1$
  Fin Mientras
Fin

Evidentemente, en el algoritmo anterior podemos incluir el test de eliminación de variables cada vez que se actualice el valor de la incumbente. Empíricamente hemos comprobado que, en el caso de que la cota superior inicial sea suficientemente ajustada, no es rentable su utlización, ya que el número de variables que se eliminarán es bastante reducido comparativamente con la cantidad de variables que se eliminan inicialmente.

3. PROBLEMAS CON DOS RESTRICCIONES DEL MISMO SENTIDO

Consideremos ahora un problema de la forma

$$
(KP2) \quad \begin{array}{l} \min dX \\ cx \geq c_0 \\ gx \geq g_0 \\ x_j \in \{0,1\}, j \in N, \end{array}
$$

donde $c, g \in R^n$, $d \in R^{n+}$ y $c_0, g_0 \in R^+$

Debemos observar que la formulación de $(KP2)$ se corresponde con una clse más amplia de problemas que es

$$
(KP2') \quad \begin{array}{l} \min dx \\ cx \geq c_0 \\ gx \geq g_0 \\ x_j \in \{0,1\}, j \in N, \end{array}
$$

donde $c, g \in R^n, d \in R^n$ y $c_0, g_0 \in R^+$.

Efectivamente, si una variable de $(KP2')$ tiene un coeficiente de coste $d_j < 0$, basta con hacer un cambio de variable $y_j = 1 - x_j$ para obtener un problema transformado equivalente del tipò $(KP2)$.

Además si en $(KP2')$ una variable x_j con $d_j < 0$, tiene ambos coeficientes c_j y G_j positivos, podemos fijarla a 1 y eliminarla del problema, actualizando los valores de los términos independientes de las restricciones.

Supongamos, por lo tanto, que tenemos un problema del tipo $(KP2)$. Para este problema podemos hacer una eliminación previa de algunas variables, ya que si x_j es tal que tanto c_j como g_j son ≤ 0 entonces x_j nunca estará en una solución óptima, por lo que podemos fijarla a 0.

Resulta, ahora, difícil cuáles son las variables más "prometedoras" para formar parte de una solución óptima. Evidentemente, las que tengan un coeficiente d_j menor serán, a priori, mejores candidatas pero sólo cuando sus coeficientes c_j y g_j sean suficientemente grandes, ya que, de no ser así, su inclusión en una solución conllevaría la incorporación de otras muchas variables con lo que disminuiría su interés de cara a la función objetivo.

Resultaría, sin embargo, más fácil tener una idea clara de cuales son las variables "mejores" si el problema $(KP2)$ tuviese una única restricción. Una observación trivial es que estas variables no serían las mismas para cumplir la primera restricción que para la segunda. En cualquier caso, las dos relajaciones de $(KP2)$ obtenidas eliminando una de las dos restricciones, proporcionan cotas inferiores para el problema original; además, obtendremos información sobre cual de las dos desigualdades resulta más restrictiva para la resolución de $(KP2)$. Posteriormente utilizaremos esta información para definir una estrategia en el diseño de un algoritmo de enumeración implícita.

CÁLCULO DE COTAS INFERIORES

Consideremos las siguientes relajaciones del problema $(KP2)$

$$
\begin{array}{ll}
(RL) & \min dx \\
& cx \geq c_0 \\
& gx \geq g_0 \\
& 0 \leq x_j \leq 1, j \in N
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(RL1) & \min dx \\
& gx \geq g_0 \\
& 0 \leq x_j \leq 1, j \in N,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(RL2) & \min dx \\
& cx \geq c_0 \\
& 0 \leq x_j \leq 1, j \in N,
\end{array}
$$

Sean $N^1 = \{1,...,n\}$ el conjunto de índices de variables ordenados de la siguiente forma: Primero los correspondientes a variables con $g_j \geq 0$ por orden creciente de d_j/g_j y después los índices de variables con $g_j < 0$ ordenados según valores decrecientes de d_j/g_j (creciente en valor absoluto).

Proposición 3: Sea $N^1 = \{1,...,n\}$ el cojunto de índices de variables que acabamos de definir,

entonces $z^1_{\text{inf}} = \sum_{j=1}^{s_1+1} d_j x^*_j$ es una cota inferior para $(KP2)$, siendo $s_1 + 1$ el primer índice del conjunto ordenado N^1 para el que $\sum_{j=1}^{s_1+1} g_j \geq g_0$, y $x^* \in R^n$ el vector de componentes

$$x^*_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j < s_1 \\ \left(g_0 - \sum_{j \leq s_1} g_j\right)/g_{s1} & \text{si } j = s_1 + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración: es evidente ya que x^* es una solución óptima para $(RL1)$ que, a su vez, es una relajación de $(KP2)$ y z^1_{inf} el valor de la función objetivo para esta solución.

Corolario 4: Sea x^* como en la Proposición 3. Si $\sum_{j=1}^{s_1+1} c_j x^*_j \geq c_0$, entonces x es óptimo para (RL).

Consideremos ahora el conjunto $N^2 = \{1,...,n\}$ de índices de variables ordenados de forma que primero aparecen los correspondientes a variables con c_j positivo, según el orden creciente de los cocientes d_j/c_j, y después los índices de las variables de coeficientes c_j negativo ordenadas por valor decreciente (creciente en valor absoluto) de d_j/c_j

Proposición 4: Sea $N^2 = \{1,..,n\}$ el conjunto de índices de variables que acabamos de definir, entonces $z^2_{\text{inf}} = \sum_{j=1}^{s_2} d_j x^*_j$ es una cota inferior para $(KP2)$, siendo s_2+1 el primer índice del conjunto ordenado N^1 para el que $\sum_{j=1}^{s_2+1} c_j \geq c_0$, y $x^* \in R^n$ el vector de componentes.

$$x^*_j \quad \begin{cases} 1 & \text{si } j \leq s_2 \\ \left(c_0 - \sum_{j \leq s2} cj\right)/c_{s2+1} & \text{si } j = s_2 + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración: Es evidente, ya que x^* es una solución óptima para el problema $(RL2)$ que es una relajación de $(KP2)$ y $z_{\inf}^2$ el valor de la función objetivo para esta solución.

Corolario 5: Sea x^* definido como en la Proposición 4. Si

$$\sum_{j=1}^{S_2} g_j x_j^* \geq g_0$$

entonces x^* es un óptimo del problema (RL).

Tanto $z_{\inf}^1$ como $z_{\inf}^2$ pueden reforzarse teniendo en cuenta las condiciones de integridad de las variables de forma análoga al caso de $(KP1)$.

Corolario 6: $z_{\inf} = \max\,\{z_{\inf}^1, z_{\inf}^2\}$ es una cota inferior para $(KP2)$

Análogamente a $(KP1)$, podemos obtener dos cotas inferiores, asociadas a cada variable, para el caso en que éstas se fijen a 0 ó a 1. Para ello, dada una variable j definimos los subproblemas

$$\begin{array}{ll}
(KP1_j) & \min \displaystyle\sum_{k\in N\{j\}} d_k x_k \\
 & \displaystyle\sum_{k\in N\setminus\{j\}} c_k x_k \geq c_0 - c_j \\
 & \displaystyle\sum_{k\in N\setminus\{j\}} g_k x_k \geq g_0 - g_j \\
 & x_k \in \{0,1\}, k \in N\setminus\{j\} \\
(KP0_j) & \min \displaystyle\sum_{k\in N\{j\}} d_k x_k \\
 & \displaystyle\sum_{k\in N\setminus\{j\}} c_k x_k \geq c_0 \\
 & \displaystyle\sum_{k\in N\setminus\{j\}} g_k x_k \geq g_0 \\
 & x_k \in \{0\}, k \in N\setminus\{j\}
\end{array}$$

y aplicamos el procedimiento anterior de obtención de cotas inferiores a cada subproblema. Así obtenemos dos cotas inferiores $z1_j$ y $z0_j$ que son, respectivamente, la cota inferior que tendríamos si en el problema original $(KP2)$ se hubiese fijado x_j a 0 ó a 1. Posteriormente utilizaremos estas cotas en un procedimiento de enumeración implícita para eliminar variables, fijándolas a 0 ó a 1, reduciendo así las dimensiones del problema original.

ALGORITMO DE ENUMERACIÓN IMPLÍCITA

A continuación proponemos un algoritmo de enumeración implícita para $(KP2)$. Se trata de un algoritmo que utiliza criterios semejantes al de Martello y Toth [MaTo79] para problemas con una única restricción, imponiendo además, a las subsoluciones parciales que se obtienen, poder satisfacer la otra restricción. Es fundamental en este algoritmo conocer a priori cual es la desigualdad más "restrictiva" ya que ello permitirá eliminar rápidamente partes importantes del espacio de búsqueda. Esta será la restricción que haya proporcionado la mayor de las dos cotas inferiores. Por tanto, existen dos versiones distintas del algoritmo propuesto, en función de que la restricciccón más vinculante sea la primera o la segunda.

Sin pérdida de generalidad y para una mayor claridad en la exposición, supondremos a partir de ahora que el subproblema que ha proporcionado la mejor cota inferior es $(RL1)$ por lo que tomamos la primera restricción como la más vinculante. Sea $N^1 = \{1, ..., n\}$ el conjunto de índices de variables ordenados como en la Proposición 3.

En este procedimiento se construyen subsoluciones parciales para $(KP2)$, que no satisfacen la primera restricción. Estas se completan, añadiendo el menor número de elementos, hasta obtener una solución posible. Dada una subsolución parcial, mientras no se satisfaga la primera restricción, se incluyen en la misma la primera variable que no haya sido previamente considerada, que permita mejorar el valor de la incumbente y que pueda satisfacer las dos restriciones. Cuando la nueva subsolución parcial satisfaga ambas restricciones comprobamos si el valor de la función objetivo asociado a la misma mejora el valor de la incumbente para actualizarlo.

Dada una subsolución parcial, Martello y Toth [MaTo79] proponen un criterio para saber a priori si ésta no va a poder proporcionar, en caso de que llegue a completarse, un valor de la función objetivo mejor que el de la incumbente. En particular, dada una solución parcial xp el valor

$$zxp_- = \sum_{j=1}^{n} d_j.xp_j + \lfloor \left(c_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j \right) .d_{r+1}/c_{r+1} \rfloor ,$$

donde $r = \max \{j \in N/xp_j = 1\}$, es una cota inferior del valor de la función objetivo que se puede obtener completando esta solución parcial de forma que cumpla la primera restricción. Por lo tanto, si zxc_- es mayor o igual que el valor de la incumbente haremos backtracking.

Para saber si se puede cumplir la segunda restricción, asociado a cada variable j se define

$$\text{sumg}_j^+ = \sum_{k>j} \{g_k / g_k > 0\}$$

Si ésta no puede llegar a satisfacerse, haremos backtracking eliminando de la solución parcial variables, empezando por la última, hasta encontrar una cuya eliminación permita satisfacerla.

Cuando tengamos una solución posible cuyo último elemento no sea la última variable x_n, para continuar la exploración eliminaremos de la solución únicamente la última variable introducida, ya que por la ordenación no podemos asegurar que al añadir una variable posterior no se puede mejorar el valor de la incumbente. Si, por el contrario, el último elemento de la solución es x_n eliminaremos todas las variables de índices sucesivamente correlativos (en orden decreciente) con la variable x_n.

En el caso que el backtracking se realice por la condición de poda de Martello y Toth [MaTo79] procederemos exactamente igual. También efectuaremos el mismo retroceso cuando tengamos una subsolución parcial que no cumpla la primera restricción y la siguiente variable candidata x_j tenga un coeficiente c_j negativo, ya que en este caso la inclusión de una o varias de las variables posteriores no llevará a satisfacer esta restricción.

Teniendo en cuenta que conocemos los valores de las cotas $z1_j$ y $z0_j$ asociadas a cada variable, podemos utilizarlas en un procedimiento de eliminación de variables, como en el caso de $(KP1)$, fijándolas a 0 ó a 1, respectivamente, cuando el valor de dichas cotas supere el valor de la incumbente. También en este caso, este criterio proporciona reducciones sensibles de las dimensiones del problema que se esté resolviendo, mejorando los criterios clásicos de eliminación.

Suponemos, como para $(KP1)$ que, inicialmente, disponemos de una solución posible obtenida mediante una heurística. Posteriormente propondremos una heurística específica para problemas de este tipo especialmente adecuada para aquellos que tengan características numéricas similares a las que se dan en algunas de las relajaciones lagrangianas mencionadas en la introducción.

Además, al comenzar la exploración obtenemos una solución posible para $(KP2)$. Compararemos el valor de la función objetivo asociado a la misma con el de la incumbente obtenida mediante la heurística y, en el caso en que ésta sea mejor, actualizaremos el valor de la incumbente.

Notación:

n	Número total de variables que intervienen en el problema.
$sumg_j^+ = \sum_{k>j} \{g_k / g_k > 0\}$	Suma de los coeficientes positivos de la restricción correspondientes a variables con índice posterior a j
$zxp_- = \sum_{k=1}^{n} d_k xp_k + \lfloor \left(c_0 - \sum_{1=1}^{n} c_1 \right) d_{r+1}/c_{r+1} \rfloor$	Cota del valor de la función objetivo para subsoluciones obtenidas a partir de xp que satisfagan la 1ª restricción (r es el mayor índice de variables fijadas a 1
zxp_-j	Cota inferior análoga a zxp_- que se obtendría si se incluyese la variable j en la subsolución parcial xp.
xp	Vector cuyas componentes a 1 indican los índices de las variables que intervienen en la subsolución parcial.
$r1 = \sum_{j=1}^{n} c_j xp_j$	Valor de la primera restricción asociado a una solución.
$r2 = \sum_{j=1}^{n} g_j xp_j$	Valor de la segunda restricción asociado a una solución parcial xp
$fp = \sum_{j=1}^{n} d_j xp_j$	Valor de la función objetivo asociado a una solución parcial xp

Algoritmo

Inicialización

Calcular Incumb — *Valor de la cota superior obtenido mediante una heurística*

Si incumb $\leq$ zinf **Terminar** — *La solución incumbente es óptima*

Aplicar test de eliminación de variables

Para $j = 1, n$ **Hacer** $xp_j = 0$ — *Empezar con la subsolución parcial vacía*

$ra \longleftarrow 0$

$r2 \longleftarrow 0$

$fp \longleftarrow 0$

Fin inicialización

Mientras no fin **Hacer**

Ampliar subsolución parcial xp

Si $r1 \geq c_0$ **y** $r2 \leq g_0$ **y** $fp <$ incumb — *La solución parcialxp es una subsolución posible mejor que la incumbente*

Actualizar solución incumbente

Hacer backtracking 1

En otro caso si $zcp\_j \leq$ incumb — *La subsolución parcialxp no se puede completar mejorando el valor de la incumbente.*

Hacer backtracking 2

En otro caso si $c_j < 0$ — *No se puede satisfacer la primera restricción.*

Hacer backtracking 2

En otro caso si $r2 + g_j +$ $\text{sumg}_j^+ < g_0$ — *No puede satisfacerse la segunda restricción*

Hacer backtracking 3

Fin si

Fin mientras

Siendo

Ampliar subsolución parcial xp

Mientras $zxp\_j <$ incumb **y**

$r1 + c_j < c_0$ **y**

$c_j > 0$ **Hacer**

Añadir elemento j

$j \longleftarrow j + 1$

Fin Mientras

Fin

Backtracking 1 consiste en eliminar de la solución xp únicamente la última variable añadida a la misma cuando ésta no sea x_n, mientras que, cuando sea x_n, se eliminarán los últimos elementos correlativos de la solución parcial y la variable inmediatamete anterior a la última correlativa.

Backtracking 2 consiste en eliminar los últimos elementos correlativos añadidos a la subsolución parcial xp y la variable inmediatamente anterior a la última correlativa, y backtracking 3 consiste en eliminar todos los elementos de la subsolución xp con un índice igual o posterior a r siendo

$$r = \text{mas } \{j \in N/xp_j = 1 \text{ y } \sum_{k=1}^{r} g_k xp_k + \text{ sumg}_r^+ \geq g_0\}$$

el índice de la última variable a partir de la cual puede completarse la subsolución parcial xp satisfaciendo la 2ª restricción.

De nuevo, para mayor claridad en la exposición, en el esquema anterior suponemos que en cada paso las cantidades $fp, r1$ y $r2$ asociadas a cualquier subsolución parcial xp están actualizadas.

El algoritmo anterior finalizará, bien cuando se obtenga una incumbente que sea menor o igual que la cota inferior (la solución asociada a la misma será óptima), bien cuando en alguno de los pasos de retroceso se llegue a una subsolución parcial vacía para la que no exista ninguna variable candidata para completarla.

El test de eliminación de variables es exactamente igual que en el caso del algoritmo para $(KP1)$. Asimismo, este test podría aplicarse cada vez que se actualizase la incumbente, aunque, al igual que para $(KP1)$, su utilización no resulta rentable cuando la solución generada por la heurística proporcione una cota superior suficientemente ajustada.

El esquema anterior es igualmente válido para el caso en el que la restricción más vinculante sea la segunda. Para adaptarlo a esta situación tendremos que considerar el conjunto $N^2 = \{1, ..., n\}$ de índices de las variables ordenados como en la Proposición 4 y sustituir todas las condiciones referentes a la primera restricción para una condición análoga respecto a la segunda y viceversa.

Procedimientos heurísticos para (KP1) y (KP2)

En los apartados anteriores hemos propuesto dos algoritmos de enumeración implícita para la resolución de los problemas $(KP1)$ y $(KP2)$. En la inicialización de ambos hemos supuesto que disponemos de una solución posible. A continuación proponemos dos procedimientos heurísticos para obtener soluciones posibles para cada uno de estos dos tipos de problemas.

PROBLEMAS (KP1)

La heurística que exponemos a continuación obtiene soluciones posibles para problemas del tipo $(KP1)$. Este procedimiento procede en cuatro etapas, en la primera de las cuales se obtiene una primera solución. Pueden construirse ejemplos en los que esta fase falle, pero raramente ésto ocurrirá. De hecho, la calidad de la primera solución no será normalmente buena, dado que en su obtención no se tienen en cuenta los coeficientes de coste d_j, y la única justificación para utilizarla, es asegurar, en la gran mayoría de los casos, la obtención de una solución posible a partir de la cual se obtendrán mejoras sucesivas. Debemos resaltar el hecho que la ordenación que consideramos en la primera etapa es diferente de las ordenaciones que hemos considerado en los apartados anteriores para obtener cotas inferiores del valor de los problemas. Ahora consideraremos los índices de variables ordenados por valor creciente de los cocientes g_j/c_j que nos dan una medida de lo sugerentes que resultan las variables para satisfacer las dos restricciones simultáneamente.

Por lo tanto, el interés de la primera etapa radica en el hecho de obtener una priemra solución formada por aquellas variables que ofrecen una mejor relación entre los coeficientes en ambas restricciones. Lo anterior resulta especialmente interesante en aquellos problemas en los que resulta difícil construir alguna solución que satisfaga simultáneamente ambas restricciones. Esta primera solución no será en general minimal, entendiendo por minimal aquella solución tal que se fijase a 0 alguna de las variables que están con valor 1 dejaría de serlo. Es decir, a menudo existirá algún subconjunto estricto del conjunto de variables que están fijadas a 1 que forme una solución posible.

En la segunda etapa construiremos una solución minimal contenida en la primera. Para ello únicamente fijaremos a cero alguna de las variables que están con valor uno en la solución inicial. En particular, la solución obtenida será, a menudo, la mejor posible, debido al orden en el que hemos considerado las variables.

En las dos etapas posteriores mantenemos la estructura obtenida en las dos primeras fases, a saber: un conjunto de índices asociado a una solución posible no minimal y una solución minimal (a menudo la mejor) contenida en ella. Estas etapas consisten en mejoras a base de intercambios. Ello se debe a que el conjunto de variables a partir del cual se ha obtenido la solución no minimal, y por tanto del que se han elegido las variables que forman la solución minimal, no tiene, en absoluto, en cuenta los coeficientes de coste. Por ese motivo, es probable que alguna de las variables con mejor coeficiente de coste, haya quedado fuera del conjunto de variable elegibles y que ahora sea posible intercambiarla por otra que pertenezca a la solución minimal obtenida.

En la primera mejora intentamos intercambios de variables que están en la solución minimal por variables que están fuera de la solución no minimal, siempre que el intercambio proporcione una solución posible cuya subsolución minimal asociada mejora el valor de la función objetivo.

Finalmente, en la segunda mejora se intentan substituir variables de la solución minimal por conjunto de variables no pertenecientes a la solución no minimal. De nuevo, el intercambio se realizará siempre que sea posible obtener una nueva solución posible cuya subsolución minimal asociada mejore el valor de la función objetivo.

La heurística es como sigue:

1.- CONSTRUIR UNA PRIMERA SOLUCIÓN POSIBLE

Sea $N^1 = \{1, ..., n\}$ el conjunto de índices de variables ordenados por orden creciente de g_j/c_j.

Sea $s_1 = max\{j \in N^1 / \sum_{k=1}^{j} g_k \leq g_0\}$ y $S^1 = \{j \in N^1 / j \leq s_1\}$

Si el vector x dado por : $x_j = 1, \forall j \in S^1, x_j = 0 \forall J \in N^1/S^1$ no es solsución posible para $(KP1)$ Final. (La heurística falla).

Teniendo en cuenta que en N^1 aparecen primero las variables con mejor relación entre los coeficientes de las dos restricciones, la heurística raramente fallará. De hecho, este procedimiento asegura la obtención de una solución posible no entera para la relajación lineal de $(KP1)$ cuando este problema sea factible.

2. ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN MINIMAL CONTENIDA EN LA ANTERIOR

Considerar el problema $(KP1)$ restringido únicamente a aquellas variables cuyos índices pertenecen al conjunto S^1.

$$\text{Sea} \quad (KP1') \quad \min \sum_{j \in S^1} d_j x_j$$

$$\sum_{j \in S^1} c_j x_j \geq c_0$$

$$\sum_{j \in S^1} g_j x_j \leq g_0$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j \in S^1,$$

Sean $N^2 = \{1, .., s_1\}$ el conjunto de índices de variables S^1 ordenadas por orden creciente de d_j/c_j y $S^2 = \{j \in N^2 / j \leq s_2\}$ donde

$$s_2 = \min \{j \in N^2 / \sum_{k=1}^{j} c_k \geq c_0\}.$$

El vector x dando por $x_j = 1 \forall j \in S^2, x_j = 0 \forall j \in S^1/S^2$, es una solución minimal contenida en S^1. Nótese que el procedimiento anterior proporcionaría el óptimo de la relajación lineal $(KP1'_{-})$ asociada a $(KP1')$ sustituyendo la s_2–ésima componente del vector x por $x_{s2} = \left(c_0 - \sum_{j<s_2} c_k\right) / c_{s2}$.

La solución así obtenida es una solución posible para $(KP1)$ puesto que por definición el conjunto S^2 de índices de variables que están fijadas a 1 es un subconjunto de S^1 que por construcción satisface la segunda restricción. Además, la elección del índice s_2, garantiza que para S^2, también se satisface la primera restricción.

3. INTENTAR INTERCAMBIOS UNITARIOS.

Consideremos los siguientes conjuntos de índices:

$S^2 = \{1, ..., s_2\}$, que ahora suponemos ordenado por orden decreciente de coeficientes de coste d_j.

$S^1/S^2 = \{s_2 + 1, ..., s_1\}$ ordenado según orden creciente de coeficientes de coste d_j y

$S^3 = \{s_1 + 1, ..., n\}$ ordenado según valor creciente de los coeficientes de coste d_j.

Mientras no fin **Hacer**
Sean k el siguiente elemento de S^3 y $j$el siguiente elemento de S^2
Si $d_j \leq d_k$ **Entonces** Fin= cierto
En otro caso
  Sean $S^{2'} = S^2\{j\} \cup \{k\}$ y $S^{1'} = S^1\{j\} \cup \{k\}$
  Mientras $S^{1'}$ viole la 2ª restricción **Hacer**
    $S^{1'} \longleftarrow S^{1'}\{r\}$ siendo r el último elemento de $S^{1'}$
    $S^3 \longleftarrow S^3 \cup \{r\}$
  Fin Mientras
  Mientras $S^{2'}$viole la 1ª restricción **Hacer**
    $S^{2'} \longleftarrow S^{2'} \cup \{r\}$ siendo r el primer elemento de $S^{1'}$
    $S^{1'} \longleftarrow S^{1'}\{r\}$
  Fin Mientras
Si $S^{2'}$ es el soporte de una solución
  cuyo coste es menor que el de S^2 **Entonces**
    $S^2 \longleftarrow S^{2'}$
    $S^1 \longleftarrow S^{1'}$
  Fin Si
Fin si
Fin Mientras

Al final del tercer paso, en la solución estarán fijadas a 1 todas las variables cuyos índices pertenezcan el nuevo conjunto S^2. Nótese que ahora este conjunto puede contener alguna variable que inicialmente pertenecía a S^3 (es decir no formaba parte ni siquiera de la solución obtenida en el primer paso) debido a que su coeficiente de coste resulta prometedor a pesar de no ser muy buena la relación entre sus coeficientes en las dos restricciones, así como alguna de las variables que inicialmente pertenecían a S^1S^2 que haya sido necesario fijar a 1 en la nueva solución para restablecer la posibilidad de la nueva solución obtenida.

4. INTENTAR INTERCAMBIOS MÚLTIPLES.

Consideremos los siguientes conjuntos de índices $S^2, S^1 \setminus S^2$ y S^3 ordenados igual que al comienzo del tercer paso.

Mientras no fin **Hacer**
  Sean k el siguiente elemento de S^3 y j el siguiente elemento de S^2
  Si $d_j \leq d_k$ **Entonces** Fin = cierto
  En otro caso
      Sea $S^{2'} = S^2\{j\} \cup \{k\}$
      Mientras $S^{2'}$ viole la 1ª restricción **Hacer**
        $S^{2'} \longleftarrow S^{2'} \cup \{r\}$ siendo r el siguiente elemento de S^3
        $S^3 \longleftarrow S^3\{r\}$
      Fin Mientras
      Si $S^{2'}$ es el soporte de una solución posible
        cuyo coste es menor que el de S^2 **Entonces** $S^2 \longleftarrow S^{2'}$
  Fin si
Fin Mientras

En el cuarto paso, la heurística favorece la inclusión en la solución de conjuntos de variables para los que sean pequeños tanto los coeficientes de coste d_j como los de la primera restricción c_j. Este tipo de variables es, individualmente, poco adecuado para formar parte de alguna solución, debido a que en la ordenación que se hace en el primer paso, aunque el coeficiente g_j sea bastante pequeño, es poco probable que, en el caso en que c_j sea pequeño, el cociente g_j/c_j resulte de los menores independientemente del coste d_j. Análogamente, en el tercer paso la incluisón de este tipo de variables puede resultar difícil, ya que para ello sería necesario añadir alguna de las variables que, a pesar de tener un coeficiente adecuado en la 1ª restricción, se sabe que tienen un coeficiente de coste d_j poco prometedor. Este no será el caso en este cuarto paso en el que, al considerar a la vez un conjunto de variables de este tipo, el intercambio con alguna variable cuyo coeficiente de coste no sea suficientemente pequeño puede realizarse fácilmente.

Este cuarto paso fallará (análogamente al tercero), si en el proceso de intercambio no se encuentra una nueva solución que satisfaga ambas restricciones.

Finalmente y mientras se produzca alguna mejora, se añadirán a la solución todas aquellas variables que, no perteneciendo a la misma, tengan coeficiente de coste negativo y cuya inclusión en la solución no haga violar la segunda restricción, reduciendo posteriormente la nueva solución obtenida a una solución minimal.

La complejidad del peor caso de esta heurística es de $O(n^3)$. En concreto, esta cota se corresponde con el coste del tercer paso en el que, en el caso peor, se intentarán intercambiar todas las variables de S^2 por todas las de S^3, y cada uno de estos intercambios puede dar lugar a ajustes en $S1^1$, S^2 y S^3 de coste $O(n)$. En los dos primeros pasos el coste será como máximo $O(nlogn)$, ya que se realiza una ordenación y un recorrido secuencial. En el cuarto paso se realiza un recorrido de orden $O(n^2)$ en el que se estudian los intercambios entre S^2 y S^3 (sin analizar reajustes).

PROBLEMAS (KP2)

Debido a la estructura de estos problemas, es difícil conocer a priori cual de las dos restricciones resulta más difícil de satisfacer, pudiendo únicamente asegurar que, a medida que aumente el término independiente s_0 la primera restricción de $(KP2)$ resultará más difícil de satisfacer. En cualquier caso, un procedimiento para encontrar una solución posible deberá tener en cuenta este hecho y considerar algún tipo de ordenación que refleje la magnitud de los coeficientes relativa a la influencia de la restricción en la que intervienen.

Para satisfacer la 1ª restricción interesa ordenar las variables según orden creciente de d_j/c_j. Análogamente, para la 2ª restricción habría que hacerlo por orden creciente de d_j/g_j. Ahora bien, para que las dos restricciones tengan una ponderación similar habrá que normalizar ambos términos independientes con lo que las ordenaciones resultarán en función de los cocientes d_jc_0/c_j y d_jg_0/g_j respectivamente.

Ahora bien, teniendo en cuenta que las dos restricciones no resultan igualmente "vinculantes" en el sentido de que una de ellas es más fácil de satisfacer que la otra, resulta razonable utilizar una ordenación que potencie conseguir una solución que satisfaga la restricción más "difícil" sin llegar a penalizar la que resulte más "fácil". Esto puede conseguirse multiplicando cada uno de los cocientes anteriores por un factor μ_i que sea tanto mayor en la medida en que la restriccicón a la que va asociado resulte más "difícil". Teniendo en cuenta que las cotas inferiores obtenidas para los problemas del tipio $(KP2)$ reflejan la dificultad para satisfacer cada una de las restricciones, ya que estas cotas aumentan a medida que la restricción a la que están asociadas resulta más difícil de satisfacer, parece adecuado que los factores μ_i guarden proporción con dichas cotas.

A continuación exponemos una heurística para problemas $(KP2)$ que tiene en cuenta las consideraciones anteriores.

Sea $N = \{1, ..., n\}$ el conjunto de los índices de las variables ordenados según valores crecientes de $\mu_1 d_j.c_0/c_j + \mu_2 d_j g_0/g_j$, siendo μ_1 y μ_2 tales que $\mu_1 + \mu_2 = 1$ y $\mu_1/\mu_2 = z_{\inf} 1/z_{\inf}^2$.

Sea el vector x definido por: $x_j = 1, \forall j \leq s, x_j = 0 \forall j > s$ donde $s =$ min $\{j \in N / \sum_{k=1}^{j} c_j \geq c_0$ y $\sum_{k=1}^{j} g_j \geq g_0\}$

Si x no es solución posible para $(KP2)$, la heurística falla.

La heurística anterior puede fallar, ya que al existir coeficientes negativos, tanto en la 1ª como en la 2ª restricción, el procedimiento no asegura la obtención de una solución posible. Sin embargo, la ordenación que utiliza favorece la obtención de una solución posible, ya que aparecen, casi seguramente, primero las variables que tienen un coeficiente positivo en las dos restricciones y después, las que tienen un coeficiente positivo y uno negativo. Hay que resaltar que esta heurística no ha fallado en ninguno de los problemas en los que la hemos utilizado.

La complejidad del peor caso para esta heurística es de orden O$(nlogn)$ que se corresponde a la ordenación previa al recorrido secuencial que se realiza en la misma.

4. RESULTADOS COMPUTACIONALES

En esta seccicón presentamos los resultados computaciones obtenidos con los algoritmos y heurísticas propuestos anteriormente. Hemos aplicado estos procedimientos a los dos tipos de problemas de knapsack con dos restricciones que aparecen en la aplicación de la variante del algoritmo BISA [Barci85] a problemas de Set Partitioning propuesta en [BaFe88].

En particular, dado un problema de set Partitioning(SP)

$$\begin{aligned} &\min cx \\ &Ax = e \\ &x_j \in \{0,1\}, j \in N \end{aligned}$$

donde $c \in Z^{n+}, A$ es una matriz de dimensión (mxn) cuyos elementos son 0 ó 1 y $e \in R^m$ cuyos elementos son todos 1, hemos considerado los siguientes problemas duales.

$$\text{(D1)} \quad \max_{u} \quad \min_{\substack{x \in X \\ cx \geq c_0 \\ gx \leq g_0}} cx + u(e - Ax) = \max_{u} ue + \min_{\substack{x \in X \\ cx \geq c_0 \\ gx \leq g_0}} (c - uA)x$$

$$\text{(D2)} \quad \max_{u} \quad \min_{\substack{x \in X \\ cx \geq c_0 \\ gx \geq g_0}} cx + u(e - Ax) = \max_{u} ue + \min_{\substack{x \in X \\ cx \geq c_0 \\ gx \geq g_0}} (c - uA)x$$

En ambos casos la restricción $gx \leq g_0$ o $gx \leq g_0$ viene implicada por el conjunto de restricciones originales; en (D1) las componentes del vector g indican el número de elementos no nulos de las columnas de A y g_0 es el número total de filas de dicha matriz, mientras que en (D2) se trata de la restricción subrogada obtenida por la aplicación del algoritmo de Dyer [Dye80] al problema original (SP).

La restricción $cx \geq s_0$ impone que las soluciones obtenidas tengan un valor de la función objetivo del problema original mayor o igual que el valor del entero inmediatamente superior al valor de la mejor cota inferior de (SP) conocida.

La resolución de estos problemas duales vía optimización subgradiente, conlleva la resolución de una sucesisón de subproblemas cuya estructura es la de $(KP1)$ y $(KP2)$ respectivamente; en particular, dado un vector u de multiplicadores los subproblemas que deben resolverse son:

$$(RL1u) \min_{\substack{x \in X \\ gx \leq g_0 \\ cx \geq c_0}} cx + u(e - Ax) = ue + \min_{\substack{x \in X \\ gx \leq g_0 \\ cx \geq c_0}} (c - uA)x$$

$$(RL2u) \min_{\substack{x \in X \\ gx \geq g_0 \\ cx \geq c_0}} cx + u(e - Ax) = ue + \min_{\substack{x \in X \\ gx \geq g_0 \\ cx \geq c_0}} (c - uA)x$$

En $(RL1u)$ los coeficientes de la función objetivo $(c - uA)$ no están restringidos en signo, y los coeficientes y los términos independientes de las dos restricciones no son negativos. En particular, en el caso de $(RL1u)$, los coeficientes d_j de la función objetivo son los costes reducidos del problema (SP) asociados al vector de multiplicadores u; el término independiente de la primera restricción s_0 se corresponde con el número entero inmediatamente superior a la mejor cota inferior conocida para el problema original (SP), y los coeficientes de esta restricción son los coeficientes de coste del problema original. En la segunda restricción, el término independiente indica el número de restricciones del problema original (SP), mientras que los coeficientes que intervienen son el número de elementos de cada una de las columnas de la matriz de restricciones A.

En concreto, en la primera restricción los coeficientes serán números naturales y en la segunda números reales no negativos. Los términos independientes son números naturales. Es evidente, por tanto que $(RL1u)$ es un caso particular de $(KP1)$, donde, para una mayor generalidad, todos los coeficientes se consideran números reales.

En el caso de $(RL2u)$ los coeficientes d_j de la función objetivo no están restringidos en signo ya que, de nuevo, se trata de los costes reducidos asociados al vector de multiplicadores u. Tampoco están restringidos en signo los coeficientes de la segunda restricción, siendo, en cambio, los coeficientes de la primera números reales no negativos. En particular, la interpretación de la primera restricción es exactamente la misma que en el caso de $(RL1u)$.

La segunda restricción es la subrogada obtenida por la aplicación del procedidmiento de Dyer. Lo único que puede asegurarse sobre esta segunda restricción es que, debido al procedimiento utilizado para su obtención [Dye80], todos los coeficientes están normalizados respecto a la norma euclídea.

Se trata, por tanto, de un problema que tiene una estructura similar a la de los problemas del tipo $(KP2')$ que como ya se ha visto pueden transformarse en los de la clase $(KP2)$ mediante un cambio de variable. En este caso, haciendo $y_j = 1 - x_j \forall j$ tal que el coeficiente de coste $(c - uA)_j$ sea negativo, se convierte $(RL2u)$ en un problema equivalente en el que los coeficientes de la función objetivo son todos no negativos. Resulta por tanto evidente que $(RL2u)$ es un caso particular de $(KP2)$.

La experiencia computacional se ha realizado en un VAX/VMS8600. Para ello hemos generado aleatoriamente una batería de 45 problemas de Set Partitioning y hemos formulado los dos tipos de problemas duales asociados expuestos anteriormente. La resolución vía optimización subgradiente de dichos problemas duales nos ha llevado a resolver dos sucesiones de problemas de Knapsack con dos restricciones, asociadas a cada problema original de Set Partitioning, una de ellas en las que los problemas tienen ambas restricciones del mismo sentido.

Para exponer los resultados hemos agrupado los problemas según sus dimensiones. Los 9 primeros problemas tienen, aproximadamente, 20 filas y 40 columnas, los 9 siguientes 20 filas y 60 columnas, los problemas P-119-P-27 40 filas y 90 columnas, P28-P35 11 del cuarto 50 filas y 100 columnas y P36-P45 100 filas y 200 columnas. Las densidades de los distintos problemas son, en los dos primeros grupos, próximas al 11%; en el tercero algo inferiores al 6%, para los 8 primeros problemas, y superiores al 15%, para los cuatro últimos; en el cuarto y quinto grupo, aproximadamente, del 10 y 8%, respectivamente.

En las tablas 1-4, presentamos con detalle los resultados obtenidos por la aplicación de los algoritmos propuestos para resolver las dos versiones de problemas de Knapsack con dos restricciones que hemos estudiado. En las tres primeras columnas presentamos los resultados del algoritmo y la heurística para los problemas en los que las dos restricciones son de sentido distinto, mientras que en las tres últimas se exponen los resultados para los problemas con dos restricciones del mismo sentido. Teniendo en cuenta que ambos algoritmos se han utilizado en procedimientos iterativos, los resultados que presentamos se corresponden con su comportamiento medio. En concreto, $dif1$ y $dif2$ indican las diferencias medias relativas entre el valor de la solución de la heurística utilizada y el óptimo del problema. En las columnas 2 y 5, $nelim1$ y $nelim2$ indican el número medio de variables eliminadas en cada iteración al aplicar los procedimientos de eliminación de variables a las soluciones obtenidas por las heurísticas y en las colcumnas 3 y 6, $t1$ y $t2$ indican los tiempos medios por iteración requeridos por los algoritmos de enumeración implícita.

El procedimiento de Dyer [Dye80] para la obtención de la restricción subrogada puede, eventualmente, proporcionar el óptimo del problema original. En los casos en los que ello ha ocurrido no hemos formulado el problema dual (D2) y, en consecuencia, no presentamos los resultados referentes al segundo algoritmo. Tampoco exponemos resultados para los problemas de ambos tipos que no han superado las 200 iteraciones en el tiempo límite de 60 minutos.

TABLA I

	dif1	nelim1	t1	dif2	nelim2	t2
p1	0.771	28.12	0:02.98	16.017	2.24	0:00.04
p2	0.678	21.25	0:00.23	---	---	---
p3	0.922	8.43	0:09.73	5.63	1.37	0:00.42
p4	0.442	14.97	0:00.25	12.425	2.14	0:00.06
p5	1.016	28.16	0:04.63	14.79	5.38	0:00.76
p6	0.026	0.45	0:00.03	---	---	---
p7	0.272	2.34	0:00.13	---	---	---
p8	0.171	4.15	0:00.98	---	---	---
p9	0.293	21.35	0:00.14	5.01	11.51	0:00.18

TABLA II

	dif1	nelim1	t1	dif2	nelim2	t2
p10	0.131	33.22	0:00.63	---	---	----
p11	0.122	21.57	0:01.65	5.56	1.17	0:08.54
p12	0.319	33.24	0:00.07	4.53	12.65	0:00.01
p13	0.172	47.31	0:00.02	---	---	---
p14	2.480	51.24	0:00.17	5.48	6.27	0:00.08
p15	0.697	37.11	0:00.11	3.711	12.46	0:00.14
p17	0.361	19.25	0:00.08	---	---	---
p18	0.516	7.64	0:00.08	3.51	18.14	0:00.02
p19	0.213	24.86	0:00.25	3.132	19.43	0:00.01
p20	0.370	30.36	0:02.25	2.719	18.66	0:00.06
p21	2.230	10.18	0:06.67	---	---	---
p22	0.760	15.41	0:00.08	3.494	14.51	0:00.06

TABLA III

	dif1	nelim1	t1	dif2	nelim2	t2
p23	1.050	12.69	0:00.37	1.822	2.35	0:00.07
p24	---	---	---	1.944	5.46	0:00.40
p25	1.230	2.17	0:00.56	---	---	---
p26	0.850	11.73	0:00.05	---	---	---
p27	---	---	---	2.012	45.37	0:00.19
p28	1.935	42.57	0:02.28	7.500	23.12	0:00.59
p29	1.309	0.36	0:03.71	---	---	---
p30	2.254	46.89	0:09.69	6.957	31.40	0:00.42
p31	1.763	21.35	0:04.31	---	---	---

TABLA IV

	dif1	nelim1	t1	dif2	nelim2	t2
p32	0.130	34.47	0:04.71	---	---	---
p33	0.730	75.43	0:00.16	1.866	54.11	0:00.38
p34	1.740	42.21	0:11.40	---	---	---
p35	1.480	71.73	0:02.00	2.757	46.29	0:00.83
p36	1.630	54.11	0:06.40	2.473	58.31	0:00.58
p37	1.460	43.52	0:01.21	3.029	36.92	0:00.18
p38	1.010	41.91	0:03.83	---	---	---
p39	2.030	'36.44	0:05.61	1.195	61.47	0:00.01
p40	---	---	---	3.576	145.42	0:00.03
p41	---	---	---	4.305	68.16	0:00.02
p42	---	---	---	2.601	127.74	0:00.04
p43	---	---	---	3.518	130.69	0:00.05
p44	---	---	---	3.354	142.45	0:00.02
p45	---	---	---	3.345	139.52	0:00.01

De los resultados expuestos en las Tablas 1-4 podemos deducir el buen comportamiento general de los dos algoritmos utilizados. Como se puede apreciar, la calidad media de las soluciones posibles obtenidas por las heurísticas utilizadas en ambos casos es altamente satisfactoria. Debemos resaltar, asimismo, el gran núnero de variables que, en media, se eliminan en cada iteración y la eficiencia de los algoritmos empleados que se refleja en el reducidísimo tiempo medio de cálculo por iteración.

Consideramos, por tanto, que en media, las dos versiones resuelven los problemas con un esfuerzo computacional bastante reducido. Las heurísticas propuestas en los dos casos, proporcionan soluciones posibles que, cuando no se trata del óptimo, están muy próximas al mismo y los procedimientos de eliminación utilizados han permitido eliminar gran número de variables.

Hay que señalar, sin embargo que, el comportamiento de los algoritmos utilizados decae ligeramente, a medida que aumenta el valor del término independiente de la restricción $cx \geq s_0$. Ello se manifiesta especialmente en los problemas con dos restricciones de sentido distinto; en particular, no se han conseguido superar las 200 iteraciones del algoritmo utilizado en el tiempo límite de 60 minutos para ninguno de los 6 últimos problemas; sin embargo, con la formulación con las dos restricciones del mismo sentido sólamente los problemas 32, 34 y 38 no han superado dicho límite de iteraciones en el tiempo límite. Teniendo en cuanta la significación que adquiere la restricción $cx \geq s_0$ en el contexto de esta experiencia computacional, lo anterior está plenamente justificado, puesto que a medida que aumenta el valor de la cota inferior para los problemas y, por tanto, nos acercamos al valor óptimo de los mismos, los conjuntos de soluciones posibles para las relajaciones formuladas, son cada vez más restringidos, con lo que aumenta la dificultad para encontrar soluciones posibles. Consideramos, por tanto, que esta disminución en el rendimiento de los algoritmos debe achacarse a la rigidez de las formulaciones de los problemas duales y no a los algoritmos utilizados.

Teniendo en cuenta que para los problemas que se han conseguido resolver con las dos formulaciones estudiadas no se pueden apreciar diferencias significativas en el comportamiento de los algoritmos y heurísticas utilizadas consideramos que, en ningún caso, debemos considerar que (debido a que hay un número superior de problemas no resueltos en el tiempo límite) el primero de los algoritmos resulta menos eficiente que el segundo. Por el contrario, pensamos que ello simplemente refleja que la segunda de las formulaciones utilizadas resulta más adecuada que la primera para la resolución de los problemas (SP).

Por todo lo anterior, consideramos que tanto por la calidad de los resultados obtenidos como por los requerimientos computacionales de tiempo de los dos algoritmos utilizados, en ambos casos, su comportamiento ha sido eficiente.

Además la utilización de ambos algoritmos resulta muy prometedora, especialmente, teniendo en cuenta que los dos tipos de problemas de knapsack con dos restricciones que hemos estudiado aparece en distintas formulaciones de relajaciones lagrangianas asociadas a otros tipos de problemas diferentes de los de Set Partitioning. En particular, como ya hemos comentado anteriormente, estos tipos de problemas pueden aparecer en distintas relajaciones lagrangianas asociadas a problemas de localización de plantas con restricciones de capacidad; en concreto, algunas de las relajaciones lagrangianas a partir del "variable splitting" [BaFeJo86], presentan una estructura de problemas de kanpsack con dos restricciones. Lo mismo ocurre, en el caso de algunas relajaciones lagrangianas asociadas a problemas de spanning trees minimales sometidos a restricciones complementarias[BaJoMi87].

Finalmente, una línea de trabajo que resulta sugerente de la experiencia realizada consiste en estudiar las posibles mejoras en las heurísticas y en los métodos de eliminación de variables, así como la aplicación de los algoritmos obtenidos a relajaciones lagrangianas que se deriven de los problemas que se acaban de mencionar o a otros tipos diferentes de problemas.

BIBLIOGRAFÍA

[BaFe88] **Barceló J. y Fernández E.**, "Heurísticas, Métodos Duales y Algoritmos Híbridos para problemas de Set Partitioning" (1988). Aceptado, pendiente de publicación en Trabajos de Investigación Operativa.

[BaFeJö86] **Barceló J., Fernández E, Jörnsten K.**, "Computational Results from a new lagrangian Relaxation Algorithm for the Capacited Plant Location Problem". Proceedings of The Working Conference on Computational Issues in Combinatorial Optimization, Capri, Italy, Marzo 1986.

[BaJöMi87] **Barceló J., Jörnsten K., Migadadas S.**, "The Resource Contraied Spanning Tree Problem: Alternative Modelling and Algorithmic Approaches". Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, Junio 1987.

[Barci85] **Barcia P.**, "Constructive Dual Methods for Discrete Programming". Preliminary version. Universidad Nova de Lisboa, Mayo 1985.

[BarHo88] **Barcia P., Holm S.**, "A revised Bound Improvement Sequence Algorithm". European Journal of Operational Research 36, 1988, pp. 202-206.

[CrJoPa83] **Crowder H., Johson E.L., Padberg M.W.**, "Solving Large-Scale Zero-one Linear Programmming Problems". Operations Research 31, 1983, pp. 803-834.

[Dye80] **Dyer M.E.**, "Calculating Surrogate Constraints". Mathematical Programming 19, North Holland, 1980, pp. 255-278.

[Ema86] **Emalghraby S.E.**, "The knapsack Problem with Generalized Upper Bounds". OR Report no. 209. North Carolina State University at Raleigh, 1986.

[Fer88] **Fernández E.**, "Diseño y Estudio Computacional de Algoritmos Híbridos para Problemas de Set Partitioning". Tesis Doctoral. Facultat d'Informàtica. U.P.C. 1988.

[FrPI86] **Freville A., Plateau G.** "Heuristics and Reduction Methods for Multiple Constraint 0-1 Linear Programming Problems". European Journal Of Operational Research 24, North Holland, 1986, p.p. 206-215.

[GaPi85] **Gavish B., Pirkul H.**, "Efficient Algorithms for Solving Multiconstraint zero-one Knapsack Problems to Optimality". Mathematical Programming 31, North Holland, 1985, pp. 78-105.

[GiGo61] **Gilmore P.C., Gomory R.E.**, "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem, Part I. Operation Research 9, 1961, pp. 849-859.

[MaTo79] **Martello S., Toth P.**, "The 0-1 Knapsack Problem". Combinatorial Optimization, Capítulo 9. N. Christofides (Ed.),. John Wiley, 1979, pp. 237-279.

[MaTo88] **Martello S., Toth P.**, "An Algorithm for the 0-1 Knapsack Problem". Management Science 34, 1988, pp. 633-644.

[Shi79] **Shi W.**, "A Branch and Bound Method for the Multi Constraint Zero-One Knapsack Problem". Journal of Operational Resesarch Association Society 30, Pergamon Press Ltd., 1979, pp. 369-378.