QÜESTIIÓ, Vol 12, nº 2, pp. 209-250, 1988

HEURÍSTICAS, PLANOS SECANTES Y OPTIMIZACIÓN SUBGRADIENTE PARA SET PARTITIONING

J. BARCELÓ y E. FERNÁNDEZ

Universidad Politécnica de Catalunya

En este artículo se estudian los problemas de Set Partitioning (SP) desde una perspectiva algorítmica. El diseño de un procedimiento heurístico permite no sólo disponer de soluciones posibles para los mismos, sino también obtener desigualdades válidas que sean violadas por las soluciones posibles a partir de las que se obtienen. La incorporación a los problemas originales de las desigualdades válidas obtenidas proporcionan unos problemas ampliados (SPA) para los que también se propone un procedimiento heurístico y para los que, de nuevo, es posible obtener desigualdades válidas como en el caso de los problemas originales.

En este contexto, siguiendo las líneas actuales de diseño de algoritmos para problemas de optimización con estructura combinatoria, es posible diseñar una clase de algoritmos híbridos para resolver los problemas (SP) que, además, elimina uno de los principales inconvenientes de los algoritmos que se han empleado tradicionalmente: la alta degeneración que produce la utilización de la relajación lineal ordinaria.

Heuristics, Cutting Planes and Subgradient Optimization for Set Partitioning Problems.

Keywords: Set Partitioning, Cutting planes, Subgradient Optimization.

-Jaume Barceló i E. Fernández - Dpt. Estadística i Investigació Operativa. Facultat d'Informàtica - Universitat Politècnica de Catalunya - Pau Gargallo 5-08028 Barcelona

-article rebut el juliol de 1988

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los problemas (SP) ha sido abordado por numerosos autores. Desde el punto de vista teórico existe un excelente trabajo de síntesis [BaPa79] en el que se recogen la mayoría de los resultados relacionados con estos problemas. Desde el punto de vista de las aplicaciones, existen numerosísimas situaciones reales cuya formulación en términos de un programa entero responde a este tipo de problemas. Las más frecuentes son: asignación de tripulaciones [MaSh81], planificación de vuelos [Lev69] e itinerario de vehículos [Pie68,BaCr81].

La dificultad de los problemas de (SP) se refleja en la escasez de procedimientos para encontrar soluciones posibles para los mismos. A diferencia de los problemas de Set Covering (SC) y de Set Packing (SP_k), para los que se conocen soluciones posibles "triviales" ($x_j = 1, \forall J \in N$ en el caso de (SC) y $x_j = 0, \forall j \in N$ en de (SPk)) y heurísticas. Esto no ocurre, sin embargo, en el caso de problemas de (SP) cuya estructura resulta mucho más rígida y dificulta el diseño de procedimientos aproximados.

Tradicionalmente, desde una perspectiva algorítmica, se ha empleado frecuentemente la relajación lineal, pero su utilización produce, a menudo, situaciones de degeneración masiva. La reciente aparición de la heurística de Fisher Y Kedia [FiKe86] ha supuesto un avance importante en la resolución de estos problemas y su utilización abre nuevas vías en los enfoques algorítmicos a considerar [Fer88]. Sin embargo, la formulación y utilización de esta heurística en términos de problemas de Set Partitioning de maximización puede resultar sorprendente puesto que la inmensa mayoría de aplicaciones de problemas de (SP) son de minimización y la adaptación al caso de minimización de este procedimiento no resulta trivial.

En este artículo se presenta una heurística para problemas de Set Partitioning de minimización cuyo punto de partida es la que acabamos de mencionar. La capacidad para obtener soluciones posibles para los problemas originales de (SP) nos permitirá generar desigualdades válidas obtenidas mediante disyunciones a partir de cotas condicionales introducidas por Balas [Bal80]. La estructura de estas desigualdades es de tipo Set Covering (SC) y si éstas se incorporan al problema original de (SP) se obtienen unos nuevos problemas ampliados (SPA) en los que el conjunto de restricciones está formado por una familia de igualdades de tipo (SP) y una familia de desigualdades de tipo (SC). Para estos nuevos problemas (SPA) justificamos la validez de un procedimiento de obtención de desigualdades válidas similar al anterior y proponemos una heurística para obtener soluciones posibles; una vez más, estas soluciones posibles serán las que permitan diseñar un procedimiento para obtener las desigualdades válidas.

En el primer apartado se propone la heurística para los problemas de (SP) de minimización. En el segundo se justifica la validez y se propone la utilización de procedimientos para la obtención de desigualdades válidas a partir de cotas condicionales tanto para los problemas de (SP) como para los de (SPA). Posteriormente, en el tercer apartado, se propone una heurística para los problemas (SPA). Finalmente, en el cuarto apartado, se combinan los procedimientos anteriores en un esquema algorítmico de tipo híbrido y se presentan los resultados computacionales obtenidos con dos versiones diferentes del mismo.

2. HEURÍSTICA PARA PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN DE SET PARTITIONING

Los problemas que consideramos son de Set Partitioning de minimización, es decir:

$$\begin{array}{ll} \text{(SP)} & \min cx \\ & Ax = e \\ & x_j \in \{0,1\}, j \in N \end{array}$$

siendo A una matriz de dimensión $mxn, c \in Z^{n+}$ y e el vector m-dimensional formado por todo unos. $M = \{1,2,...,m\}$ y $N = \{1,2,..,n\}$ son, respectivamente, los conjuntos de índices de filas y de columnas de la matriz A.

Cualquier solución posible X para (SP) cumple $Ax = e$. Por tanto, para cualquier vector u se satisface la primera condición de holgura complementaria $u(Ax - e) = 0$. Resulta sugerente, por tanto, en este contexto diseñar procedimientos que obtengan un par de soluciones (x, u) para los problemas primal y dual respecticamente, que se aproxime, en la medida de lo posible, a satisfacer la segunda de las condiciones de holgura complementaria.

La metodología que acabamos de describir ha sido utilizada por Fisher y Kedia en su trabajo y es la que hemos seguido en la heurística que proponemos a continuación.

HEURÍSTICA DUAL

La heurística dual tiene en cuenta la estructura del problema dual (D) que es un problema de multi-knapsack

$$\begin{array}{ll} \text{(D)} & \max ue \\ & uA \leq o \end{array}$$

En todo momento, la heurística considera dos parámetros asociados a cada variable dual; por un lado, el valor máximo que puede asignarse a la misma sin que se viole ninguna restricción y, por otro lado, el valor máximo que puede asignarse a cada variable dentro de una restricción determinada. Para cada restricción, se asigna a cada una de las variables que intervienen en la misma el máximo valor tal que se cumplan las dos condiciones anteriores. Posteriormente, se incrementa en lo posible el valor de aquellas variables que intervengan únicamente en restricciones que se cumplen como desigualdad estricta.

Supondremos que las variables primales están ordenadas por orden no creciente de costes, es decir $c_j \geq c_{j+1} \forall j \in N$. Sean, además, $M_i = \{J \in N \,/\, a_{ij} = 1\}$, $\forall i \in M$, $N_j = \{i \in M/a_{ij} = 1\}$, $\forall J \in N$. La heurística dual es la siguiente:

Inicialización

$u_i = 0 \forall i \in M$

$d_i = \min_{j \in Ni} \forall i \in M$

Definir para cada variable dual u_i cual sería el mayor valor en que se podría incrementar sin violar ninguna de las restricciones, si todas las demás variables se mantuviesen constantes.

Fin inicialización

Para $j = n, 1, -1$ hacer

δ_j indica en cuanto se podría incrementar cada variable que interviene en la restricción j, para satisfacer esa restricción como estricta igualdad.

$$\delta_j = \frac{c_j - \sum_{i \in M_j} u_i}{|M_j|}$$

Para $i \in M_j$ **Hacer**

$\triangle_i \longleftarrow \min \{\delta_j, d_i\}$

$u_i \longleftarrow u_i + \triangle_i$

Asignar a u_i el mayor valor que nos asegura que no viola ni la restricción que estamos considerando ni ninguna de las posteriores.

Para $s \in N_i$ **Hacer**

Actualizar el valor d_s para todas las variables que intervienen en esa restricción.

si $\min_{l \in M_s}\{c_\ell - \triangle_i\} < d_s$**entonces** $d_s \longleftarrow d_s - \triangle_i$

Fin para

Fin para

Fin para

Para $i = 1, m$ **hacer**

Si existe alguna variable que sólamente interviene en restricciones satisfechas como estricta desigualdad incrementar su valor manteniendo la factibilidad.

$$u_i \longleftarrow u_i + \max\left\{0, \min_{j \in N_i}\left(c_j - \sum_{k \in M_j} u_k\right)\right\}$$

Fin para

HEURÍSTICA DE MEJORA

Después de haber obtenido una solución posible para (D), se puede utilizar una adaptación de la heurística de mejora de Fisher y Kedia [FiKe86] gracias a la cual los valores de dos variables duales se incrementan simultáneamente en una cantidad determinada a cambio de reducir el valor de una tercera en la misma cantidad.

Por lo tanto, dada una solución u, posible dual, se intenta aumentar el valor Σu_i de la función objetivo del problema (D) identificando 3 índices de variables $i_1, i_2, i_3 \in M$ y modificando los valores de las variables asociadas a dichos índices en una cantidad $\triangle$.

$$\begin{aligned} u_{i1} &\longleftarrow u_{i1} - \triangle \\ u_{i2} &\longleftarrow u_{i2} + \triangle \\ u_{i3} &\longleftarrow u_{i3} + \triangle \end{aligned}$$

con lo que el valor Σu_i quedará finalmente incrementado a $\triangle$.

Sean N^a y N^i los subconjuntos de índices de filas de (D) que particionan su conjunto de restricciones en activas e inactivas. $N^a = \left\{ j \in N / \sum_{i \in M_j} u_i = c_j \right\}$ y $N^i = \left\{ j \in N / \sum_{i \in M_j} u_i > c_j \right\}$

Para que el intercambio sea posible los índices de variables i_1, i_2, i_3 deberán ser tales que:

$$1)\ N_{i2} \cap N_{i3} \cap N^a = \Phi$$

$$2)\ (N_{i2} \cup N_{i3}) \cup N^a \subseteq N_{i1}$$

Una vez determinados los índices i_1, i_2, i_3 que satisfacen las condiciones anteriores, $\triangle$ vendrá determinado por las restricciones no activas $j \in N^i$ para las que el valor $\sum_{i \in M_j} u_i$ aumenta con el intercambio. Dicho conjunto viene dado por $N_i^* = \{ j \in N^i / a_{i2j} + a_{i3j} - a_{i1j} > 0 \}$

Si $N_i^* = \Phi$, entonces el problema dual es no acotado y por lo tanto el problema primal es no factible.

Si $N_i^* \neq \Phi$, se define

$$\triangle = \min_{j \in N_i^*} \frac{c_j - \sum_{i \in M_j} u_i}{a_{i2j} + a_{i3j} - a_{i1j}}$$

que es la cantidad máxima en la que se pueden modificar las variables asociadas a los índices i_1, i_2, i_3 manteniendo todos los requisitos de factibilidad.

La heurística de mejora anterior se repetirá tantas veces como sea posible terminando cuando ya no se encuentren los índices i_1, i_2, i_3 que permitan realizar el intercambio.

Hay que resaltar que la calidad de la solución dual obtenida en la primera fase puede influir decisoriamente en el éxito de la segunda fase de la heurística, que es en la que se obtiene la solución primal. En la medida en la que la solución dual obtenida se acerca al óptimo del problema lineal dual, mejora sensiblemente la correspondiente solución primal.

Por ese motivo, resulta sugerente la sustitución de la heurística dual por la utilización de optimización subgradiente aplicada a la relajación lagrangiana ordinaria en la primera fase de la heurística, para obtener así una solución dual cuya calidad esté asegurada. De esta forma, al disponer de una solución dual que es casi óptima, el vector de costes reducidos asociado favorece la obtención de una solución primal que satisfaga, en la medida de lo posible, las condiciones de holgura complementaria.

Esta línea que se acaba de mencionar es la que, como se verá posteriormente, ha proporcionado mejores resultados computacionales puesto que no sólo las cotas inferiores obtenidas son sensiblemente mejores, sino que la solución primal obtenida a partir de esta solución dual es, en muchos casos, mejor que la obtenida a partir de la solución dual obtenida mediante la heurística dual propuesta.

HEURÍSTICA PRIMAL

La heurística que se utiliza para obtener soluciones primales sigue el criterio descrito anteriormente de intentar satisfacer las condiciones de holgura complementaria. Se trata de la búsqueda de una solución posible x para (SP) mediante un procedimiento que fija los valores de las variables x_j de forma secuencial manteniendo los requerimientos de factibilidad. Es decir, una vez obtenido el vector s de costes reducidos asocidado a una solución dual u, se irán fijando variables a 1 de forma secuencial, manteniendo la factibilidad, de forma que el producto escalar de los vectores $c - uA$ y x sea lo menor posible. El criterio que se sigue es el de incluir en la subsolución parcial que se construye aquella variable de las que no hayan sido consideradas hasta el momento que tenga el menor coste reducido. De esta forma se obtendrá una solución posible que se aproxime lo más posible a las condiciones de holgura complementaria. Además, considerando que el problema (SP) es de minimización, interesa construir una solución posible que tenga el menor número posible de variables fijadas a 1; en consecuencia, se efectuará la ruptura de empates eligiendo aquella variable que intervenga en la mayor cantidad posible de restricciones, es decir tal que $|M_j|$ sea máximo.

El papel que juegan los tests lógicos aplicados en cada iteración de la heurística primal es de gran importancia, ya que se acelera el proceso de convergencia al fijar el valor de más de una variable en cada iteración y se reduce el riesgo de construir subsoluciones parciales que no sea posible completar en soluciones posibles.

Asociados a cada subsolución parcial x, se definen dos subconjuntos de índices de filas que particionan el conjunto de restricciones del problema primal entre las que actualmente se satisfacen y las que no.

Sean $T(x) = \left\{ i \in M / \sum_{j \in M_i} x_j = 1 \right\}$ y $U(x) = \left\{ i \in M / \sum_{j \in M_i} x_j = 0 \right\}$ dichos conjuntos

Además, se define el conjunto $J(x) = \{J \in N / M_j \cap T(x) = \Phi\}$ de índices de variables que no intervienen en ninguna restricción que ya esté previamente satisfecha. La heurística irá seleccionando variables pertenecientes al conjunto $J(x)$ para ir fijándolas a 1.

El procedimiento es como sigue:

Inicialización

$x = 0$	*Todas las variables están a 0.*
$T(x) = 0$	*No existe ninguna fila que esté satisfecha.*
$U(x) = M$	
$J(x) = N$	*Todas las variables son elegibles.*
fin = falso	*El procedimiento terminará cuando se hayan satisfecho todas las restricciones o bien cuando se demuestre que el problema es no factible*

Fin Inicialización

Mientras no fin **Hacer:**

Elegir $j \in J(x) t.q. sj = \min_{k \in J(x)} s_k$

En caso de empate elegir $j t.q. |M_j|$ sea máximo.

Hacer $x_j = 1$

Actualizar $T(x) \longleftarrow T(x) \cup M_j$

$U(x) \longleftarrow U(x) \setminus M_j$

$J(x) \longleftarrow J(x) \setminus (\bigcup_{i \in M_j} N_i)$

Aplicar los test lógicos

Si problema no factible **o** $U(x) = \Phi$ fin = cierto

Fin mientras

Si la heurística no encuentra solución se puede volver a empezar todo el procedimiento eliminando esta vez, en la inicialización, del conjunto $J(x)$ el índice de la variable j que fue la primera en fijarse a 1 en la iteración anterior.

Si una subsolución parcial no logra completarse en una solución posible, se comienza de nuevo el procedimiento eliminando en la reinicialización del conjunto $J(x)$ de variables elegibles la primera que se haya fijado a 1 en la iteración anterior.

A pesar de que el éxito de este procedimiento heurístico no está asegurado, como veremos posteriormente la experiencia computacional confirma el hecho de que raramente falla.

3. PLANOS SECANTES A PARTIR DE COTAS CONDICIONALES: UNA APLICACIÓN A PROBLEMAS DE SET PARTITIONING.

En este apartado exponemos un tipo de desigualdades válidas para problemas de Set Partitioning. Se trata de un caso particular de desigualdades obtenidas a partir de disyunciones válidas para problemas enteros o mixtos de programación matemática. La teoría básica para la obtención de este tipo de desigualdades que fue desarrollada por Balas [Bal80] es, en principio, aplicable a todo tipo de problemas enteros y mixtos pero su utilización, en el diseño de algoritmos concretos no resulta sencilla para el caso general. En el caso de los problemas de Set Covering (SC), la estructura de los problemas permite generar de forma práctica las desigualdades que, además, son del mismo tipo que las restricciones del problema original [Bal80,BaHo80].

A continuación veremos que, en el caso de los problemas de (SP), cuando se disponga de una solución posible para los mismos, es posible obtener este tipo de desigualdades y se propone la utilización de un procedimiento para generarlas. De esta forma, los planos secantes así obtenidos pueden utilizarse en el diseño de algoritmos específicos para resolver los problemas de (SP).

DISYUNCIONES A PARTIR DE COTAS CONDICIONALES.

El siguiente teorema [Bal80] permite, bajo ciertas condiciones, obtener disyunciones válidas para los problemas enteros o mixtos a partir de las cuales pueden obtenerse desigualdades válidas.

Teorema 1: Sean $\pi \in R^{n+}, \pi_0 \in R^+, N = \{1, ..., n\}$, ${}_i \subseteq N, i = 1, ..., p, 1 \leq p \leq n$. Existe $v \in R^{p+} t.q$

$$\sum_{i/j \in Q_i} v_i \leq \pi_j, \; j \in N \text{ y } \sum_{i=1}^{p} v_i \geq \pi_0$$

si y sólo si cualquier entero $x \in N^{n+}$, tal que satisface $\pi x < \pi_0$ también satisface la disyunción

$$\bigvee_{i=1}^{p} (x_j = 0, j \in Q_i)$$

Dado un problema de Set Partitioning (SP) min $\{cx/Ax = e, x \geq 0, x_j \in \{0,1\}, J \in N\}$; su problema dual lineal asociado es (DP) max $\{ue/uA \leq c\}$

Sean z_{sup} una cota superior conocida de (SP), y u y s dos vectores tales que u sea una solución posible de (DP) y $s = c - uA \geq 0$.

$$Ax = e \implies -uAx = -ue$$

Sumando la igualdad anterior a la desigualdad $cx < z_{\text{sup}}$ se tiene que $(c - uA)x < z_{\text{sup}} - ue$. En consecuencia, $sx < z_{\text{sup}} - ue$ es una desigualdad que deberá ser satisfecha por cualquier solución posible x para (SP) tal que $cx < z_{\text{sup}}$

Utilizando la desigualdad $(c - uA)x < z_{\text{sup}} - ue$ como $\pi x < \pi 0$ y definiendo $v_i = s_{j(i)}, i = 1, ..., p$ para algunos índices $j(i) \in N$, se puede aplicar el teorema anterior. De este modo, se obtiene el siguiente

Corolario 1: Sean z_{sup} una cota superior (SP) y dos vectores u, s tales que $s = c - uA \geq 0$. Si existe $S \subset N_1, S = \{j(1), ..., j(p)\}, 1 \leq |N_1|$, tal que $\sum_{j \in S} s_j \geq z_{\text{sup}} - ue$, entonces para cualquier colección de conjuntos $Q_i \subset N, i = 1, ..., p$ tales que $\sum_{i/j \in Q_i} s_j(i) \leq s_j, j \in N$, se cumple que cualquier solución x posible para (SP) $t.q. cx < z_{\text{sup}}$ debe satisfacer la disyunción $\bigvee_{i=1}^{p} (x_j = 0, j \in Q_i)$ (1).

Hay que resaltar que para aplicar el Corolario 1 es necesario disponer de una cota superior del problema y de una solución posible para el mismo. Por consiguiente, la heurística propuesta en el apartado anterior se convierte en la herramienta que permite generar disyunciones del tipo (1) para los problemas de (SP), ya que nos proporcionará tanto la solución primal x, y por lo tanto una cota superior, como el vector u con un esfuerzo computacional reducido. Posteriormente, veremos que también es posible satisfacer la condición adicional para la aplicación del corolario de que la suma de ciertos costes reducidos sea mayor o igual que el gap de dualidad que se tenga.

Un caso particular muy interesante del Corolario 1 ocurre cuando la disyunción generada consta de un único elemento, puesto que ésta se convierte en la condición $x_j = 0, j \in Q_1$. Es decir, definiendo el conjunto $Q_1 = \{j \in N_1/s_j \geq z_{\text{sup}} - ue\}$ cualquier solución x, posible para (SP), tal que $cx < z_{\text{sup}}$ debe satisfacer $x_j = 0, j \in Q_1$.

La importancia de este caso particular radica en que permitirá fijar a 0 y, por lo tanto, eliminar del problema original todas aquellas variables cuyo coste reducido asociado sea mayor o igual que el gap entre la cota superior z_{sup} y el valor de la función objetivo asociado a la solución u posible para el problema dual lineal, a partir de la cual se ha generado el vector s de costes reducidos.

El corolario 1 proporciona, además, una herramienta para obtener disyunciones del tipo $\bigvee_{i=1}^{p} (x_j = 0, i \in Q_i)$ (1) que sean válidas para el problema (SP).

Para ello sólo necesitamos disponer de una cota superior z_{sup}, una solución u posible para el problema dual lineal (DP) y un subconjunto $S \subset N_1$ para el que se cumpla la condición $\sum_{j \in S} s_j \geq z_{\text{sup}} - ue$ (posteriormente se verá que esta condición es fácil de satisfacer).

Por lo tanto, dado un conjunto S, cualquier familia de subconjuntos Q_i de N_1 que cumpla $\sum_{i/j \in Q_i} s_j(i) \leq s_j, j \in N$, proporcionará una disyunción válida del tipo (1).

LOS PLANOS SECANTES

Consideremos el i-ésimo término de una disyunción (1), $x_j = 0,\ j \in \ _i$. Evidentemente cualquier solución x posible para (SP) que satisfaga ese término también deberá satisfacer las desigualdades

$$(2) \qquad \sum_{j \in N_h Q_i} x_j \geq 1, \quad h \in M$$

y por lo tanto, para cualquier elección de los índices $h(i) \in M$, $i = 1, \ldots, p$, cualquier solución posible x que satisfaga la disyunción

$\bigvee_{i=1}^{p} x_j = 0, j \in Q_i)$, deberá también cumplir la disyunción $\bigvee_{j \in N_{h(i)} \setminus Qi}^{p} (\Sigma x_j \geq 1, j \in Q_i)$.

Lo anterior implica que, para x entero, se debe también satisfacer la desigualdad $\sum_{j \in W} x_j \geq 1$, siendo $W = \bigcup_{i=1}^{p} (N_{h(i)} \setminus Q_i)$

Expresando en estos términos el Teorema 1 se obtiene el siguiente

Corolario 2: Sean z_{sup} una cota superior de (SP) y u,s tales que $s = c - uA \geq 0$. Si existe un conjunto de índices de columnas $S = \{j(1), \ldots, j(p)\}, 0 \neq S \subset N$ tal que

$$\sum_{j \in S} s_j \geq z_{\text{sup}} - ue,$$

entonces, para cualquier conjunto de p índices de filas $h(i) \in M, i = 1$, y para cualquier colección de conjuntos $Q_i \subseteq N_{h(i)}$ tal que

$$\sum_{i/j \in Q_i} s_{j(i)} \leq s_j, j \in N,$$

se tiene que cualquier solución posible x para (SP) tal que $cx < z_{\text{sup}}$ satisface la desigualdad

$$\text{(3)} \qquad \sum_{j \in W} x_j \geq 1, \text{ siendo } W = \bigcup_{i=1}^{p} (N_{h(i)} \setminus Q_i)$$

Como ya se ha comentado anteriormente, para la obtención de disyunciones válidas y, por lo tanto, para la obtención de los planos secantes del tipo (3) es necesario disponer de un conjunto S de índices de columnas para el que se verifique la condición

$$\text{(4)} \qquad \sum_{j \in S} s_j \geq z_{\text{sup}} - ue,$$

En [Bal80] se demuestra el siguiente teorema para los problemas de Set Covering (SC):

Teorema 2: Sean u, s dos vectores que satisfacen $s = c - uA \geq 0$, y sea x una solución posible para (SC) y $S(x) = \{j \in N/x_j = 1\}$ el soporte del vector x. Entonces,

$$u(Ax - e) = 0 \implies \sum_{j \in S} s_j \geq z_{\text{sup}} - ue \text{ para } S = S(x).$$

La propia demostración de este teorema para el caso de (SC) es también aplicable al caso de (SP). Por lo tanto, en el caso de los problemas de (SP) la condición $u(Ax-e) = 0$ también resulta suficiente para garantizar (4). Además, para cualquier solución x posible para (SP) siempre se deben cumplir las restricciones $Ax - e = 0$ y, por tanto, la condición $u(Ax - e) = 0$, independientemente de la solución lineal dual u que tengamos.

Todo lo anterior nos permite afirmar que, dada una solución posible x para (SP), siempre vamos a estar en una situación favorable a la hora de generar desigualdades del tipo (3).

Observación: Hay que resaltar que las desigualdades (3) obtenidas para los problemas (SP) no son desigualdades válidas en el sentido clásico para el problema original. Las condiciones bajo las que se obtienen garantizan, no obstante, que cualquier solución posible para (SP) mejor que la que haya proporcionado la cota superior z_{sup} (si es que existe) deberá satisfacer la desigualdad obtenida. Por lo tanto, la utilización de este tipo de desigualdades nos permite limitar el espacio de búsqueda de soluciones posibles para (SP) a aquellas que sean mejores que una solución dada; es decir, aquellas que satisfagan las desigualdades así generadas.

La observación anterior sugiere el diseño de algoritmos en los que, una vez obtenida una desigualdad válida (3) para un problema (SP), ésta se incorpore al conjunto de restricciones del problema original obteniendo así un nuevo problema (SPA). Teniendo en cuenta que las desigualdades (3) son siempre de la forma $\pi x \geq 1$ (tipo Set Covering), la estructura del problema ampliado que se obtenga ya no será la de un problema de (SP) sino que su conjunto de restricciones constará de ecuaciones de dos tipos: unas del tipo $Ax = e_m$ (las del problema original), y otras del tipo $Gx \geq e_r$ (las correspondientes a los planos secantes obtenidos que se han incorporado). Es decir: (SPA) $\min\{cx/Ax = e'_m gx \geq e'_r x_j \in \{0,1\}, j \in N\}$.

Para sistematizar este tipo de algoritmos resulta necesario garantizar que para los problemas ampliados (SPA), puedan cumplirse las condiciones bajo las que es posible generar estas desigualdades válidas.

Dado (SPA), su problema dual lineal asociado es (DPA) max $\{ue_m + ve_r/uA + vG \leq c, v \geq 0\}$. Sean z_{sup} una cota superior de (SPA), (u,v) una solución posible para (DPA) y $s = c - uA - vG \geq 0$.

$$\left.\begin{array}{ll} Ax = e_m & \Longrightarrow uAx = ue_m \\ Gx \geq e_r & \Longrightarrow vGx \geq ue_r \end{array}\right. \quad \Longrightarrow uAx + vGx \geq ue_m + ve_r$$

Por lo tanto, dada una cota superior z_{sup} del valor del problema, para cualquier solución posible x para (SPA) tal que $cx < z_{\text{sup}}$, se cumple que $(c - (uA + vG))x < z_{\text{sup}} - (ue_m + ve_r)$. De esta forma podremos aplicar el Teorema 1 a los problemas (SPA) obteniendo el siguiente

Corolario 3: Sea z_{sup} una cota superior del valor (SPA) y dos vectores (u,v), s tales que $v \geq 0, s = c - (uA + vG) \geq 0$.

Si existe $\subset N_1, S = \{j(1), ..., j(p)\}, 1 \leq p \leq |N_1|$ tal que $\sum_{j \in S} s_j \geq z_{\text{sup}} - (ue + ve_r)$, entonces para cualquier colección de conjuntos $Q_i \subset N, i = 1, ..., p$ tales que $\sum_{i/j \in Q_i} s_j(i) \geq s_j, j \in N$, se cumple que cualquier solución x es posible para (SPA) tal que $cx < z_{\text{sup}}$ debe satisfacer la disyunción

$$(1) \qquad \bigvee_{i=1}^{p} (x_j = 0, j \in Q_i)$$

Por lo tanto, bajo las hipótesis anteriores, es posible obtener disyunciones válidas del tipo (1) y, como consecuencia, desigualdades válidas del tipo (3) para (SPA). Además, modificando levemente el Teorema 2 podemos garantizar que para estos problemas siempre se puede satisfacer la condición adicional (4); para ello tendremos tan sólo que reducir, tal vez, el valor de algunas variables duales asociadas a las restricciones de la forma $Gx \geq e_r$.

Como consecuencia, una vez que dispongamos de una solución posible primal para (SPA) y de una solución posible para el problema lineal dual asociado podrán obtenerse desigualdades del tipo (3) para los problemas (SPA). Hay que resaltar que para estos problemas no son válidas ni las heurísticas para problemas (SP), ni aquellas para los de (SC). En el siguiente apartado propondremos una heurística para obtener soluciones posibles para estos problemas.

El siguiente teorema [Bal80] proporciona condiciones bajo las que podemos asegurar que las desigualdades obtenidas además scn violadas por una determinada solución. Ello nos permitirá garantizar la reduccicón del espacio de búsqueda de soluciones no sólo a aquellas que sean mejores que la que ha proporcionado la cota z_{sup} sino también a aquellas que sean distintas de la solución a partir de la que generamos la desigualdad.

Sea $T(x) = \{i \in M/a^i x = 1\}$, el conjunto de índices asociado a las restricciones satisfechas como estricta igualdad por una solución posible x para un problema de Set Covering (SC).

Teorema 3: Sean z_{sup}, u y s tales que $s = c - uA \geq 0, S = \{j(1), ..., j(p)\}$ $, \Phi \neq S \subseteq N$ tal que $\sum_{j/inS} s_j \geq z_{\text{sup}} - ue, Q_i \subset N, i = 1, ..., p$ tales que $\sum_{i/j \in Q_i} s_{j(i)} \leq s_j, j \in N$, y sea $j(i) \in Q_i, i = 1, ..., p$.

Si x^* es una solución posible para (SP) tal que $S \subseteq S(x^*)$ y $h(i) \in T(x^*) \cap M_{j(i)}, i = 1, ..., p$,

$$\sum_{j \in W} x_j \geq 1, \quad \text{siendo} \quad W = \bigcup_{i=1}^{p} \left(N_{h(i)} \setminus Q_i\right) \quad ,$$

Observación: Cabe resaltar que el teorema 3 también es válido tanto para problemas (SP) como (SPA). Ello es así puesto que su demostración se centra en el hecho de que para las restricciones que satisfacen como estricta igualdad existe un único elemento de las mismas que está en el soporte de la solución y además dicho elemento no pertenece al conjunto W por construcción del mismo. Para los problemas de Set Partitioning el conjunto $T(x)$ coincide con el conjunto total de los índices de filas y para los problemas ampliados (SPA) $T(x)$ también será no vacío puesto que contendrá el conjunto de restricciones del problema original.

A continuación, exponemos un procedimiento de generación de planos secantes [Bal80] que es válido tanto para (SC) como para (SP) y (SPA). Está basado en la aplicación del Teorema 4 y tiene en cuenta los comentarios hechos anteriormente.

Puesto que los coeficientes de las desigualdades (3) son todos 0 ó 1 y el término independiente es siempre 1, una desigualdad de este tipo será tanto más potente en la medida que tenga menos coeficientes iguales a 1. Por este motivo, intentaremos generar aquellas desigualdades que minimicen el tamaño del conjunto.

$$\bigcup_{i=1}^{p} \left(N_{h(i)} \setminus Q_i\right)$$

Para ello, podemos tomar $S = \{j(1), ..., j(p)\}$ como el conjunto de los índices asociados a los p mayores costes reducidos, siendo p el menor número entero para el que se cumple la condición

$$\sum_{i=1}^{p} s_{j(i)} \geq z_{\text{sup}} - ue$$

Además, elegiremos los índices $h(i) \in M_{j(i)}$ intentando que en cada paso se minimice el tamaño del conjunto W_k W_{k-1}, siendo

$$W_k = \bigcup_{i=1}^{k} \left(N_{h(i)} \setminus Q_i\right).$$

PROCEDIMIENTO DE GENERACIÓN DE CORTES

Sean una solución posible x de soporte $S(x)$, dos vectores u, s tales que $s = c - uA \geq 0$ y $S^+ = \{j \in S(x) / s_j > 0\}$.

Inicialización

$W = \Phi$

$S = S^+$

$z_1 = ue$

Fin Inicialización

Mientras $z_1 < z_{\text{sup}}$ **hacer**

definir $s_{j(i)} = \max\limits_{j \in s} s_j$

$Q = \{j \in N / s_j \geq s_{j(i)}\}$

elegir $h(i)$ tal que $|(N_{h(i)}\ Q) \cup W| = \min\limits_{h \in M_{j(i)}} |(N_h\ Q) \cup W|$

hacer $W \longleftarrow W \cup (N_{h(i)\ Q})$

$z_1 \longleftarrow z_1 + s_{j(i)}$

si $z_1 \geq z_{\text{sup}}$ **entonces**

$Q_i = Q \cap N_{h(i)}$

$s_j \longleftarrow s_j - s_{j(i)} \forall j \in Q_i$

$S \longleftarrow S\ \{j(i)\}$

Fin si

Fin mientras

Añadir la desigualdad

$$\sum_{j \in W} x_j \geq 1$$

Fin

4. HEURÍSTICA PARA PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN DE SET PARTITIONING AMPLIADOS CON RESTRICCIONES DE TIPO SET COVERING

Consideremos ahora problemas de la forma

$$
\text{(SPA)} \qquad \begin{array}{l} \min cx \\ Ax = e_m \\ Gx \geq e_r \\ \pi x \geq 1 \\ x_j \in \{0,1\}, j \in N \end{array}
$$

siendo $C \in Z^{n+}$, A y G matrices de dimensiones mxn y $(r-1)xn$, respectivamente, cuyos elementos son 0 ó 1, e_m y e_{r-1} los vectores m-dimensional y $(r-1)$-dimensional, respectivamente, formados por todo unos y π un vector n-dimensional cuyas componentes son 0 ó 1.

En el apartado anterior, se han obtenido desigualdades válidas tanto para los problemas (SP) como para (SPA) de la forma $\pi x \geq 1$. Un procedimiento que las incorpore de forma iterativa al problema original generará nuevos problemas cuya estructura será la de (SPA).

Teniendo en cuenta que las desigualdades que se obtengan serán valiosas en la medida que éstas nos proporcionen información adicional sobre el problema original, y que la única forma de obtener dicha informacicón es resolviendo el problema resultante de incorporar la desigualdad obtenida al problema original, la eficiencia de un procedimiento que genere dichas desigualdades para problemas (SP) vendrá dada en términos de nuestra capacidad para resolver (SPA). Asimismo, al igual que en el caso de problemas de (SP) puros, la utilización de los resultados descritos en el apartado anterior sólo será posible a partir de soluciones posibles para estos problemas. Por consiguiente, un procedimiento para obtener soluciones posibles para (SPA) nos permitirá, además, establecer un proceso algorítmico en el que se obtengan también desigualdades válidas para estos nuevos problemas.

Hay que resaltar que para (SPA), no son válidas las heurísticas específicas para problemas (SC) (no aseguran que las restricciones asociadas a la matriz A se vayan a satisfacer como estricta igualdad), ni tampoco las específicas para los problemas (SP) (ya que estaríamos eliminando del conjunto de soluciones posibles todas aquellas que satisfaciendo A como estricta igualdad satisfagan alguna restricción de G o la ecuación $\pi x \geq 1$ como estricta desigualdad).

El procedimiento que proponemos se basa en la heurística para (SP) de minimización y considera la estructura específica de los problemas (SPA). También consta de dos fases, en la primera de las cuales obtiene una solución posible (u, v, w) para el problema lineal dual asociado (DPA) y, a partir de ella, una solución posible x para (SPA). De nuevo, se utiliza la información que proporciona el vector de costes reducidos asociados a la solución (u, v, w) para intentar acercarse, en la medida de lo posible, a las condiciones de holgura complementaria.

HEURÍSTICA DUAL

Dado un problema (SPA), su problema dual continua asociado es de la forma

$$(\mathrm{DA}_r) \qquad \begin{array}{l} \max\ ue + ve + wx \\ uA + vG + w\pi \geq c \\ v \geq 0, w \geq 0 \end{array}$$

siendo $r - 1$ el número de filas de la matriz G. Teniendo en cuenta que el subproblema

$$(\mathrm{SPP}) \qquad \begin{array}{l} \min\ cx \\ Ax = e \\ x_j \in \{0,1\}, \forall j \in N \end{array}$$

es un subproblema de Set Partitioning puro que está contenido en (SPA_r) $\forall r$, a partir de cualquier solución posible u^* del problema lineal dual asociado a (SPP)

$$(\mathrm{SDP}) \qquad \begin{array}{l} \max\ ue \\ uA \leq c \end{array}$$

podremos disponer, al menos, de una solución posible de la forma $(u^*, 0, 0)$ para (DA_r).

Por lo tanto, podemos suponer que conocemos una solución inicial posible de la forma (u^*, v^*0) para (DA_r) y que deseamos obtener otra solución posible diferente de $(u^*, v^*, 0)$, ya que de esta forma la información referente a la restricción π que se están añadiendo al problema primal se reflejarán también en la nueva solución dual que se obtenga.

Inicialmente a la variable dual w se le asigna un valor no negativo de forma que se asegure que la nueva solución sea diferente de la incial $v(u^*, v^*, 0)$. La variable w toma el máximo valor que mantendría la factibilidad en la última restricción dual si todas las demás componentes fuesen 0. Ahora, el vector (u^*, v^*, w) ya no tiene por qué seguir siendo una solución posible para (DA_r).

El procedimiento irá reduciendo lo menos posible las componentes de las restantes variables duales u y v hasta obtener una nueva solución posible dual. Primero se reducen los valores de las variables duales asociadas a las restricciones de $\leq$ y posteriormente, si es necesario, las asociadas a las restricciones de igualdad (SPA). La cantidad en la que se reduce cada variable es la mínima necesaria para que dejen de violarse todas las restricciones del problema dual en las que interviene dicha variable. Teniendo en cuenta que en el caso de las variables asociadas a las restricciones de $\geq$ de (SPA), no siempre será posible reducir estas variables en dicha cantidad ya que están restringidas en signo a ser positivas, dichas variables se reducirán en lo que sea posible.

Finalmente, si existen variables duales que sólo intervienen en restricciones que se satisfacen como estricta desigualdad, dichas variables se incrementarán en la máxima cantidad posible, manteniendo la factibilidad del vector resultante.

Sean $s = c - u^*A - v^*G$ el vector de costes reducidos asociados a la solución inicial $(u^*, v^*, 0)$, $P = \{j \in N/\pi_j = 1\}$, $K = \{1, 2, ..., r-1\}$, $K_1 = \{j \in N/g_{1j} = 1\}$, $\forall l \in K$ y $L_j\{i \in K/g_{ij} = 1\}$, $\forall j \in N$. La heurística es como sigue:

Inicialización

$w = \min \{c_j / j \in P\}$

Para $j = 1, n$ **hacer** — *Actualizar el vector de costes reducidos para el nuevo valor de la variable* w

si $j \in P$ **entonces** $s_j \longleftarrow s_j - w$

Fin para

Sean $V = \{j \in P / s_j < 0\}$ — *Conjunto de índices de restricciones violadas por el nuevo vector*

$M_A = \{i \in M / \exists\, j \in N_i \cap V\}$ — *Conjunto de índices de variables duales* u_i *que intervienen en alguna restricción violada*

$M_G = \{l \in K / \exists\, j \in L_1 \cap V t.q. v_j > o\}$ — *Conjunto de índices de variables duales* v_l *que tienen un valor estrictamente positivo y que intervienen en alguna restricción violada*

Para $i \in M_A$ **hacer** — *numviol_i es el número de restricciones violadas en las que interviene la variable dual asociada* u_i

numviol_$i = |M_i \cap V|$

Fin para

Para $l \in M_G$ **hacer** — *numviol_l es el número de restricciones violadas en las que interviene su variable dual asociada* v_l

numviol_$1 = |M_l \cap V|$

Fin para

Fin inicialización

Mientras $V \neq \Phi$ **hacer**

Si $M_G \neq 0$ **entonces**

Sea $l \in M_G$ $t.q.$ numviol_$l = \min\limits_{k \in M_G}$ numviol_k

$\triangle + 1 = \min \{v_{l'_{j \in K_1}} \quad \min s_j\}$

$v_l \longleftarrow v_l - \triangle_1$

Para $j \in K_l$ **hacer**
  Si $s_j < 0$ **y** $s_j + \triangle_l > 0$ **entonces**
    Para $i \in M_j$ numviol_$i \longleftarrow$ numviol_ $- 1$
    Para $s \in L_j$ numviol_$s \longleftarrow$ numviol_$s - 1$
  Fin si
  $s_j \longleftarrow s_j + \triangle_l$
Fin para

En otro caso

Sea $i \in M_A$ $t.q.$ numviol_$i = \min\limits_{k \in M_A}$ numviol_k

$$\triangle_i = -\min_{j \in M_i} s_j$$

$$u_i \longleftarrow u_i - \triangle_i$$

Para $J \in N_i$ **hacer**
  Si $s_j < 0$ **y** $s_j + \triangle_i > 0$ **entonces**
    Para $k \in M_j$ numviol_$k \longleftarrow$ numviol_$k - 1$
    Para $l \in L_j$ numviol_$l \longleftarrow$ numviol_$l - 1$
  Fin si
  $s_j \longleftarrow s_j + \triangle_i$
Fin para

Fin si

Fin mientras

Para $i \in M$ **hacer**

$$u_i \longleftarrow u_i \max\{0, \min_{j \in N_i} s_j\}$$

Para $s \in K$ **hacer**

$$v_s \longleftarrow v_s + \max\{0, \min_{j \in K_s} s_j\}$$

Fin para

Aplicar la heurística de mejora para problemas duales de problemas de Set Partitionning puros a las variables duales u_i, $i \in M$.

Cuando $r = 1$ la solución inicial $(u^*, 0)$ se obtiene mediante la heurística para problemas duales asociados a problemas (SP). Para valores de $r > 1$, aplicando de forma iterativa el procedimiento anterior, siempre será posible conocer una solución inicial de la forma $(u^*, v^*, 0)$ al menos la última componente del vector V^* será no nula. Dicha solución vendrá dada por $(u^*_{r-1}, v^*_{r-1}, w^*_{r-1}, 0)$, siendo $(u^*_{r-1}, v^*_{r-1}, w^*_{r-1})$ la solución obtenida por este procedimiento para el problema (DA_{r-1}) en el que la desigualdad $\pi x \geq 1$ es la restricción correspondiente a la $(r-1)$-ésima fila de matriz G.

Observación: Al igual que en el caso de problemas (SP), la calidad de la solución dual obtenida en esta primera fase puede influir decisoriamente en el éxito de la segunda fase en la que se obtiene la solución primal. Por ese motivo, hemos utilizado también un procedimiento de optimización subgradiente aplicado a la relajación lagrangiana ordinaria de los problemas (SPA). De nuevo, el vector de costes reducidos así obtenido favorecerá la obtención de una solución primal que satisfaga, en la medida de lo posible, las condiciones de holgura complementaria.

Heurística primal

A continuación proponemos una heurística para encontrar soluciones posibles para problemas (SPA). Por cuestión de notación supondremos que el conjunto de todas las restricciones de tipo Set Covering (incluida la que en la heurística dual se denomina π) viene representado por la matriz G. Por lo tanto, ahora G será una matriz de dimensión rxn.

La heurística se aplica de forma iterativa mientras no se encuentra una solución posible y mientras no sea vacío el conjunto de variables candidatas a formar parte de una solución y consta de dos fases: en la primera, se intenta encontrar una solución posible para el subproblema de Set Covering (SPC) min $\{cx/Gx \geq e_r\}$, imponiendo además la condición de que en cada momento la subsolución parcial que se construye pueda ser parte de una subsolución parcial posible del subproblema de Set Partitioning (SPP) min $\{cx/Ax = e_m\}$; es decir imponiendo dos condiciones:

1) el conjunto de variables que se ha fijado a 1 sea ortogoanl con respecto a la matriz A.

2) el subproblema resultante al eliminar todas las componentes fijadas a 1 sea factible.

En la segunda fase se intenta completar la subsolución parcial obtenida en la primera. Para ello se plantea el subproblema (SPP) de Set Partitioning puro resultante de eliminar de (SPA) todas las restricciones del tipo de Set Covering (puesto que se satisfacen con la subsolución parcial obtenida) y todas las del tipo de Set Partitioning que también se satisfagan con la subsolución parcial actual. Posteriormente, se aplican los test lógicos al subproblema (SPP) y se aplica la heurística propuesta en el primer apartado al problema de Set Partitioning de minimización que se obtenmga después de hacer las eliminaciones correspondientes.

La decisión de intentar satisfacer en primer lugar el conjunto de restricciones asociado a la matriz G se debe a que ninguna de las soluciones obtenidas previamente, a las que no hemos impuesto la condición de satisfacer la última restricción asociada a la matriz G (la desigualdad $\pi x \geq 1$), ha proporcionado un valor mejor que z_{sup} y al hecho, ya conocido, de que cualquier solución posible para el problema original con un valor de la función objetivo mejor que el que nos haya proporcionado el valor z_{sup}, si es que existe, deberá satisfacer esta última desigualdad.

Sean

R el conjunto de índices de variables que son candidatas a entrar en la solución.

$M*$ el conjunto de índices de filas de A que ya están recubiertas por la solución parcial actual.

K^* el conjunto de índices de filas de G que ya están recubiertas por la solución parcial actual.

N_i^* el conjunto de índices de variables que intervienen en la i-ésima restricción de A, susceptibles de ser elegidas para formar parte de la solución.

K_l^* el conjunto de índices de variables que intervienen en la k-ésima restricción de G, susceptibles de ser elegidas para formar parte de la solución.

Un esquema de la heurística es el siguiente:

Inicialización

$R = N$	*Inicialmente el conjunto de índices de variables elegibles es N.*
$M^* = \Phi$ $K^* = \Phi$	*Inicialmente ninguna restricción está recubierta.*
$N_i^* = N_i' \forall i \in M$ $K_\ell^* = K_\ell' \forall \ell \in K$	*Todas las variables que intervienen en cada fila son candidatas a formar parte de la solución.*
fin = falso	*El procedimiento terminará cuando se encuentre una solución posible para (SPA) o cuando el conjunto de variables elegibles sea vacío.*

Fin inicialización

Mientras no fin **hacer**

Buscar solución posible para (SPC)

Si la solución posible de (SPC) no es solución posible para (SPA) **entonces**

Construir el subproblema (SP) resultante de aplicar los test lógicos a la matriz A obtenida al fijar a 1 las variables que forman la solución de (SPC)

Aplicar heurística para set partitioning a (SP)

Si no se encuentra solución posible para (SP) **entonces**

Sea j^* el índice de la última variable fijada a 1

Hacer

$x_j^* \longleftarrow 0$	*Eliminar j^* de la solución actual de (SP)*
$M^* \longleftarrow M^* \setminus M_j^*$ $K^* \longleftarrow K^* \setminus K_j^*$	*Actualizar el conjunto de filas satisfechas tanto en$A$ como en$G$*

Fin hacer

Fin si

Fin si

Fin mientras

Con respecto de la heurística anterior, hay que resaltar que no está asegurado el éxito de la misma. Hay que señalar que aunque existe la posibilidad de que falle, en la práctica ésto raramente ocurre. De hecho, como veremos posteriormente, el fallo de esta heurística puede resultar un buen criterio de terminación en un algoritmo que, de forma iterativa, vaya obteniendo soluciones posibles y generando, a partir de ellas, desigualdades violadas por las mismas. Ello se debe a que, si en un momento determinado disponemos de una solución óptima y se genera una desigualdad válida, el nuevo problema ampliado no tiene por qué tener solución posible. En ese sentido, el fallo de la heurística puede ser un buen indicador de dicha situación.

La primera fase del procedimiento para obtener soluciones posibles para problemas (SPA) obtiene una solución posible para el subproblema de (SC) contenido en (SPA). En esta primera parte, se intentan satisfacer las restricciones asociadas a la matriz G de forma secuencial fijando a 1 ciertas variables con una heurísitica de tipo greedy.

El criterio que hemos seguido es, de nuevo, intentar satisfacer en la medida de lo posible las condiciones de holgura complementaria. para ello, se eligen, de forma secuencial, variables que se fijan a 1. En cada paso se elige, entre las variables no consideradas todavía, aquella que tenga un coste reducido lo menor posible, que intervenga en la última restricción no satisfecha de la matriz G, que sea ortogonal respecto a la matriz A con todas las variables que ya estén previamente fijadas a 1 y cuya eliminación no produzca un subproblema no factible con respecto a la matriz A ni a la matriz G. El procedimiento que busca una solución posible para (SPC) es el siguiente:

Inicialización	
fin 1=falso	*El procedimiento terminará cuando se encuentre una solución posible para (SPC) o bien cuando el conjunto restante de variables elegibles sea vacío. También terminará en caso de que veamos que el conjunto restante de variables elegibles resultante no permita satisfacer ni siquiera la primera restricción de G*
Fin inicialización	
Mientras no fin ℓ **hacer**	
Sea ℓ el último elemento de $K \setminus K^*$	*l es el índice de la última restricción no satisfecha de G*
Buscar $j \in K_\ell^*$ tal que:	*Buscar una variable elegible de la fila l t.q.*
i) $s_j = \min\limits_{k \in K_\ell} s_k$	*i) tenga el coste reducido lo menor posible*
ii) $M_j \cap M^* = \Phi$	*ii) no intervenga en ninguna restricción ya satisfecha de A*
iii) $\lvert N_i^*\ \{j\} \neq 0, \forall i \in M_j \cap (M \setminus M^*)$	*iii) no existe ninguan fila de A que no se pueda satisfacer al eliminar j y aplicar los tests lógicos.*
iv) $\lvert K_s^*\ \{j\}\rvert \neq 0, \forall s \in L_j \cap (K \setminus K^*)$	*No existe ninguna fila de G que no se pueda satisfacer al eliminar j y aplicar los tests lógicos.*
Si existe j **entonces**	
Hacer $x_j \longleftarrow 1$	*Añadir j a la solución actual.*
$M^* \longleftarrow M^* \cap M_j$	*Actualizar el conjunto de restricciones*
$K^* \longleftarrow K^* \cap K_j$	*satisfechas tanto en A como en G*
$R \longleftarrow R\ \{j\}$	*Actualizar el conjunto de variables elegibles*
$N_i^* \longleftarrow N_i^*\ \{j\}, \forall i \in M_j$	*Actualizar el conjunto de variables*
$K_s^* \longleftarrow K_s^*\ \{j\}, \forall s \in K_j$	*elegibles que intervienen en cada fila.*

en otro caso

si $\ell = r$ **entonces** *El conjunto de variables elegibles*
fin ℓ= cierto *no permite satisfacer ni siquiera*
en otro caso *la última restricción de G*
que se ha generado.

Sea j^* el índice de la última
variable fijada a 1
Hacer $x_j^* \longleftarrow 0$ *Eliminar de la solución actual de (SP)*
la última variable fijada a 1.
$M^* \longleftarrow M^* \setminus M_j$ *Actualizar el conjunto de restricciones*
$K^* \longleftarrow K^* \setminus K_j$ *satisfechas tanto en A como en G*

Fin si

Fin si

si $K^* = K$ **o** $R = \Phi$ **entonces** fin1=cierto

Fin mientras

5. UNA CLASE DE ALGORITMOS HÍBRIDOS PARA PROBLEMAS DE (SP)

A continuación presentamos un esquema algorítmico que recoge los procedimientos analizados en las secciones precedentes para la resolución de (SP). Este esquema se enmarca en la tendencia actual de diseño algorítmico para problemas con estructura combinatoria que apunta la utilización de algoritmos híbridos. Este tipo de algoritmos es el que ofrece más garantías de éxito al combinar distintos métodos, potenciando así las cualidades individuales de cada uno de ellos.

Los procedimientos que utilizamos son heurísticas, desigualdades válidas y relajaciones lagrangianas. Cada uno de ellos resulta en sí mismo de interés ya que parcialmente contribuye a la resolución del problema. Ahora bien, cada método presenta asimismo algún inconveniente que deseamos superar: cómo mejorar la calidad de una solución obtenida para una heurística, cómo utilizar la información proporcionada por una desigualdad válida o cómo conocer cual es la calidad de la cota inferior si no se dispone de una cota superior para compararla.

Evidentemente, para poder mejorar la calidad de una solución primal obtenida mediante una heurística resulta fundamental disponer de un procedimiento que reduzca el espacio de búsqueda de soluciones posibles; de ahí el interés en un procedimiento de generación de planos secantes que pueda combinarse con la heurística. Recíprocamente para obtener un mejor rendimiento de la información proporcionada por un plano secante resulta básico disponer de algún procedimiento heurístico que proporcione nuevas soluciones en el espacio de búsqueda más restringido que define la desigualdad. Por lo tanto, será necesario combinar el procedimiento de generación de cortes con una heurística que proporcione soluciones posibles para el problema resultante. Además, la mejor solución obtenida combinando los métodos anteriores puede utilizarse como punto de referencia para medir la calidad de las cotas inferiores obtenidas por los métodos duales.

Un esquema algorítmico para resolver (SP) de este tipo elimina, además, uno de los principales inconvenientes de los métodods clásicos de generación de planos secantes a partir de soluciones fracccionales obtenidas de tablas de Simplex: la utilización de la relajación lineal ordinaria que produce problemas de generación masica. Un esquema iterativo básico es el siguiente:

Mientras no fin **Hacer**

Sea ($\mathbf{SPA}_k$) el problema actual

Obtener una solución posible (u, v) para el problema lineal dual asociado a (SPA_k).

Obtener una solución primal x asociada a u para el problema (SPA_k).

Aplicar test dfe eliminación de variables

Generar una desigualdad válida $\pi x \geq$

Incorporar la desigualdad válida (SPA_k).

Fin mientras

El algoritmo anterior terminará cuando se demuestre que se ha encontrado el óptimo de (SP) o bien cuando falle el procedimiento para encontrar una solución posible primal. Podremos asegurar que se ha resuelto el problema al óptimo cuando se elimine el gap de dualidad.

En la iteración inicial, $k = 0$, el problema (SPA_k) es un problema de minimización de Set Partitioning puro. En las iteraciones posteriores, al incorporar la desigualdad válida del tipo $\pi x \geq 1$, la estrucutra de (SPA_k) es la de los problemas de minimización de Set Partitioning amplidados.

OBTENCIÓN DE UN PAR DE SOLUCIONES POSIBLES PRIMAL Y DUAL

La obtención de una solución posible para el problema lineal dual (DA_k) asociado a (SPA_k) puede realizarse mediante dos tipos de procedimientos diferentes. Bien por procedimientos heurísticos (la heurística dual propuesta en 2 en la primera iteración y la heurística dual propuesta en 4 en las posteriores), o bien mediante optimización subgradiente aplicada a una relajación lagrangiana. La utilización de métodos heurísticos presenta la ventaja de que computacionalmente resultan poco costosos, pero, sin embargo, la calidad de la solución dual obtenida no está garantizada. La utilización de optimización subgradiente resulta más costosa en tiempo de cálculo, pero garantiza la calidad de la solución dual obtenida. Sin embargo, si la relajación lagrangiana utilizada tiene una estructura sencilla de resolver, el esfuerzo de cálculo resulta sin lugar a dudas rentable. La versión del algoritmo con la que se han realizado las experiencias computacionales cuyos resultados expondremos posteriormente utiliza relajación lagrangiana en la primera iteración y, posteriormente, en cualquier iteración inmediatamente posterior a haber mejorado la calidad de la cota superior.

En la primera iteración se utiliza la relajación lagrangiana ordinaria dada por

$$(\mathrm{RL1}u) \qquad \min_{x \in X} cx + u(e - Ax)$$

$$\text{donde } X = \{x \in R^n / x_j \in \{0,1\}, j \in N\}.$$

En las iteraciones posteriores, teniendo en cuenta que el criterio para su utilización es haber mejorado el valor de la mejor cota superior, mantendremos como restriccicón explícita la última desigualdad generada antes de la obtención de la solución posible primal que ha proporcionado la mejora; es decir utilizaremos la relajación lagrangiana dada por:

$$(\mathrm{RL9}u, v) \quad \min_{x \in X} cx + u(e_m - Ax) + v(e_k - Gx)$$

$$\pi x \geq 1$$

donde $\pi x \geq 1$ es la desigualdad que se acaba de mencionar y, comentiendo un abuso de notación, estamos suponiendo que la matriz G está formada por todas las desigualdades obtenidas anteriormente a la misma así como por la última desigualdad válida generada inmediatamente después de haber mejorado la cota superior.

Cabe resaltar que la estructura de las dos relajaciones lagrangianas que se proponen resulta muy sencilla; las soluciones para (RLlu) son inmediatas y para ($\mathrm{RL9}uv$) se obtienen definiendo

$J_1 = \{j \in N / \pi_j = 1\}$ y $J_2 = \{j \in N / (c - uA - vG)_j \leq 0\}$ y haciendo

Si $J_1 \cap J_2 \neq \Phi$ entonces

$$x_j = \begin{array}{l} 1, \text{ si } (c - uA - vG)_j \leq 0 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{array} \qquad \text{Si } J_1 \cap J_2 = O$$

Sea j_1 tal que $(c - uA - vG)_{j1} = \min_{j \in j_1} (c - uA - vG)_j$. Entonces

$$x_j = \begin{array}{l} 1, \text{ si } (c - uA - vG)_j \leq 0 \\ 1, \text{ si } j = j_1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{array}$$

El reducido esfuerzo computacional para resolver los problemas duales asociado a estas relajaciones lagrangianas hace que su utilización resulte rentable.

Una vez dispongamos de una solución dual para (DPA_k), se obtendrá una solución posible primal para (SPA_k) utilizando las heurísticas propuestas en los apartados anteriores.

TEST DE ELIMINACIÓN DE VARIABLES Y OBTENCIÓN DE DESIGUALDADES VÁLIDAS.

Posteriormente el algoritmo aplica un test de eliminación de variables y genera una desigualdad válida del tipo $\pi x \geq 1$. El test de eliminación de variables se deriva del caso particular que resulta del Corolario 1 en el apartado 3 cuando la disyunción obtenida consta de un único término. Las desigualdades $\pi x \geq 1$ se obtienen utilizando el procedimiento de generación de cortes expuesto al final del apartado 3 cuya validez para los problemas (SPA$_k$) ha quedado probada.

En ambos casos, es necesario disponer de un par de soluciones posibles primal y dual $(x,(u,v))$ tal que

$$(5)\qquad \sum_{j\in S(x)} s_j \geq z_{\text{sup}} - (ue_m + ve_k), \quad \text{siendo } S(x) = \{j \in N/x_j = 1\} \text{ y}$$
$$s = c - (uA - vG)$$

El teorema 2 proporciona la condición necesaria para cumplir la condición anterior; ésta viene dada en términos de condiciones adicionales para el par $(x,(u,v))$. En particular, si se cumple

$$(6)\qquad u(e_m - Ax) + v(e_k - Gx) = 0$$

entonces también se cumple la condición (1).

Como ya se ha comentado anteriormente la condición (6) siempre se cumple en el caso de un problema (SP) puro ($k = 0$). No ocurre lo mismo en el caso de un problema ampliado (SPA_k) con $k \neq 0$, aunque puede lograrse (6) modificando levemente la solución dual que se tenga.

Efectivamente, sean (u,v) la solución dual actual para (DA$_k$) y x la solución primal asociada. Sean $K = \{1,...k\}$ el conjunto de índices de la matriz G y $K(x) = \{1 \in K/Gx > 1\}$. Teniendo en cuenta que

$$u(e_m - Ax) + v(e_k - Gx) = \sum_{l\in k(x)} v_1(e_k - Gx)^1$$

Si (6) no se cumple, haciendo 0 sucesivamente los componentes $v_1' l \in K(x)$, como máximo será necesario hacer todas ellas 0 para conseguir que se satisfaga esta condición.

Por lo tanto dado un par de soluciones primal y dual respectivamente, para obtener disyunciones y desigualdades válidas será necesario verificar si se cumple la condición (5). En caso que ésta no se cumpla, se irán anulando sucesivamente las componentes $v_l.l \in K(x)$ hasta satisfacer la condición (2).

TESTS LÓGICOS DE ELIMINACIÓN

La eficiencia del esquema básico algorítmico expuesto al principio de esta sección puede mejorarse incluyendo en él los clásicos tests lógicos de eliminación de variables para problemas (SP) [GaNe72,Sal75]. La utilización de estos procedimientos de reducción en una fase previa a la resolución de los problemas puede incidir favorablemente en el desarrollo posterior del algoritmo y el esfuerzo computacional que requiere su utilización resulta reducido. Ello resulta evidente, puesto que estos tests, al eliminar variables del problema fijándolas a 0 ó 1, pueden proporcionar nuevos problemas de dimensiones más reducidas en los que la aplicación de los procedimientos antes descritos resulta más eficaz.

Asimismo, cuando el test de eliminación de variables que se deriva de las disyunciones a partir de cotas condicionales fije alguna de las variables a 0, la aplicación de estos tests lógicos de eliminación puede producir eliminaciones adicionales que se deriven de la estructura del nuevo problema resultante.

6. RESULTADOS COMPUTACIONALES

Presentamos en este apartado los resultados computacionales obtenidos con el algoritmo propuesto en el apartado anterior. Las pruebas se han realizado en un VAX/VMS8600, sobre una batería de 56 problemas generados aleatoriamente mediante un procedimiento similar al descrito en [FiKe86].

Hemos agrupado los problemas según sus dimensiones en cinco grupos de unos 10 problemas cada uno. Los 10 problemas del primer grupo tienen, aproximadamente, 20 filas y 40 columnas, los 13 del segundo 20 filas y 60 columnas, los 11 del tercero 40 filas y 90 columnas los 11 del cuarto 50 filas y 100 columnas y los 10 del quinto 100 filas y 200 columnas. Las densidades de los problemas son, en los dos primeros grupos, próximas al 11%; en el tercero algo inferiores al 6%, para los 8 primeros problemas, y superiores al 15%, para los cuatro últimos; en el cuarto y quinto grupo, aproximadamente, del 10% y 8%, respectiamente.

A continuación, en las Tablas 1-5 ofrecemos datos referentes al comportamiento del algoritmo básico. Hay que notar que dos de los problemas se resolvieron óptimamente utilizando únicamente los tests lógicos y, por tanto, no disponemos de datos referentes a las distintas componentes del algoritmo para estos dos casos. Las dos primeras columnas indican el valor de la función objetivo para la primera soución dual obtenida, en el primer caso (Du) mediante la heurística dual y en el segundo (Subg), mediante aplicación de optimización subgradiente a la relajación lagrangiana ordinaria (RLlu).

La influencia del procedimiento dual utilizado en la calidad de la solución primal obtenida se pone de manifiesto en las columnas 3-4. En ellas $z1$ y $z2$ indican los valores de la función objetivo para la primera solución primal obtenida por aplicación de la heurística, a partir de las soluciones duales proporcionadas por la heurística dual y optimización subgradiente respectivamente.

Ncort indica el número de desigualdades generadas antes de terminar el algoritmo, *zsup* y *zinf* los valores de la mejor cota superior e inferior, respectivamente, al terminar el algoritmo y $it - zsup$ el número de desigualdades generadas antes de obtener la solución que ha proporcionado *zsup*.

Nelim indica el número de variables eliminadas (fijadas a 0) cuando las disyunciones obtenidas constan de un único término y *fparc* indica el valor de la función objetivo para las variables fijadas a 1 (si es que hay alguna) en la aplicación de los tests lógicos subsiguiente a dicha eliminación.

Los tiempos de *cpu* requeridos para la obtención de las dos soluciones duales, así como para la cota superior $z2$ (los de $z1$ son totalmente análogos ya que el procedimiento utilizado es el mismo), aparecen en las tres primeras columnas de las Tablas 6-10. En ellas, también se incluyen los tiempos (Corte) referentes a la generación de la primera desigualdad obtenida (los de las posteriores son totalmente similares), así como los requeridos (*Heur*2 y *Heur*2*f*) por la heurística primal para la obtención de soluciones posibles para los problemas ampliados (SPA), tanto para el problema obtenido después de incorporar al problema original la primera desigualdad generada, como en la última iteración del algoritmo, en la que dicho procedimiento ha fallado determinando, por tanto, la terminación del mismo.

Como puede apreciarse por los resultados expuestos, la calidad de la solución dual obtenida mediante la aplicación de optimización subgradiente a los problemas duales asociados a la relajación lagrangiana es, sin lugar a dudas, mucho mejor que la obtenida mediante la heurística. Además, de forma algo sorprendente, el esfuerzo computacional requerido por el procedimiento heurístico resulta, en bastantes ocasiones, ligeramente superior al de la utilización de optimización subgradiente. La explicación a este hecho puede venir dada por la complejidad del procedimiento de mejora incluido en la heurística dual frente a la sencillez en la estructura de la relajación lagrangiana. En cualquier caso, tanto por la calidad de los resultados obtenidos como por el tiempo computacional requerido, es indudable que la utilización de los procedimientos de tipo subgradiente sugeridos resulta mucho más beneficiosa.

Puede también apreciarse que la calidad de la solución primal obtenida depende en gran medida de la solución dual a partir de la cual se construye. En particular, la solución obtenida después de utilizar los procedimientos de tipo subgradiente es a menudo sensiblemente mejor, y sólamente en 7 casos es ligeramente peor, que la que se obtiene después de haber utilizado las heurísticas. Estos resultados ratifican la importancia de utilizar un procedimiento dual que proporcione soluciones de la mejor calidad posible para la obtención de las mejores soluciones en las heurísticas primales.

TABLA I

		Subg	z1	z2	ncort	zsup	zinf	it-zsup	n-elim	
p1	254.05	339.57	360*	360*	0	360*	355	0	20	360*
p2	276	292*	292*	292*	0	292*	292*	0	20	292*
p3	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
p4	215	324.37	478	392	3	334	325	2	5+1+11	
p5	118.70	143.09	274	163	0	163	144	0	22	
p6	142.31	254.70	584	584	3	530	273	2	0	
p7	87*	87*	87*	87*	0	87*	87*	0	0	
p8	146.75	233*	233*	233*	0	233*	233*	0	34	233*
p9	128.50	199*	283	199*	0	199*	199*	0	32	199*
p10	117.66	217.41	387	387	2	252	227.84	1	12	

TABLA II

	Du	subg	z1	z2	ncort	zsup	zinf	it-zsup	n-elim	fparc
p11	133.33	221*	546	221*	0	221*	221*	0	7	
p12	169.00	206.95	382	303	2	216	208.71	1	1+30	
p13	213.22	281.08	448	380	6	319	281.56	5	3+5+16	
p14	153.66	166*	168	166*	0	166*	166*	0	43	166*
p15	103.42	140.78	329	153	1	153	141.09	0	27	
p16	196.33	217.24	340	312	20	272	221.52	14	1+4+1+4	
p17	101.00	148*	389	148*	0	148*	148*	0	17	148*
p18	65.80	122.8	146	146	1	146	122.98	0	29	
p19	136.66	226.45	305	292	3	262	226.45	2	14+5+9	
p20	95.00	174.49	289	252	6	213	178.67	3	2+14+3+	
p21	213.33	311.10	499	492	8	312	311.87	7	7+7	
p22	214.27	284.70	389	361	3	305	285.63	2	2+16+10	
p23	116.17	153.01	164	283	2	164	153.18	1	6+31	

TABLA III

	Du	Subg	z1	z2	ncort	zsup	zinf	it-zsup	nelim	fparc
p24	304.73	417.32	675	557	5	421*	421*	4	1+51	421*
p25	395.74	466*	854	466*	0	466*	466*	0	27	466*
p26	287.29	639.14	1015	892	4	655	639.87	3	14+1+17	
p27	391.50	495*	921	495*	0	495*	495*	0	22	495*
p28	325.77	472.50	637	561	4	538	479.59	2	5+2+3+2	
p29	332.00	378*	643	378*	0	378*	378*	0	20	378*
p30	229.00	243.46	776	291	1	291	243.46	0	2	
p31	344.21	587.18	931	934	3	702	602.38	1	4+3+3	
p32	53.46	148.61	174	297	2	174	151.88	1	35	
p33	71.95	133*	133*	133*	0	133*	133*	0	87	133*
p34	39.96	134.48	227	227	3	188	140.37	2	5+12	
p35	77.38	159.39	181	277	2	181	165.21	1	44	

TABLA IV

	Du	Subg	z1	z2	ncort	zsup	zinf	it-zsup	nelim	fparc
p36	208.27	549.29	570*	570*	1	570*	549.29	0	52	570*
p37	226.61	478*	478*	478*	0	478*	478*	0	89	468*
p38	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
p39	179.23	399.14	477	718	2	477	403.48	1	8	
p40	100.81	268.28	485	332	2	332	273.58	0	10+1	
p41	209.43	294.15	674	511	4	388	299.46	2	5	
p42	87.05	190.77	331	318	4	250	198.03	2	1+9+4	
p43	156.02	296.33	443	429	6	368	304.44	3	7+1+1	
p44	164.26	293.39	423	313	1	313	293.39	0	38	
p45	133.29	235.96	570	273	1	273	238.29	0	26	
p46	223.44	393.25	662	423	1	423	393.25	0	29	

TABLA V

	Du	Subg	z1	z2	ncort	zsup	zinf	it-zsup	nelim	fparc
p47	187.76	397.27	631	614	2	521	413.13	1	2	
p48	208.02	434.45	658	599	9	582	448.82	3	2	
p49	171.97	329*	660	329*	0	329*	329*	0	97	329*
p50	224.29	432.24	658	613	9	486	441.92	8	21	
p51	172.08	460.49	811	566	2	566	473.32	0	3+1	
p52	239.79	431.51	763	664	12	584	445.89	7		
p53	205.66	409.30	547	707	7	516	424.86	2	5+3+1	
p54	209.36	379.11	480	691	4	480	418.84	3	17+7	
p55	116.22	333.66	648	421	2	421	347.02	0	10+6	
p56	143.57	404.39	670	545	3	441	412.44	3	1+1+51	

TABLA VII

	Du	Subg.	Heur1	Corte	Heur2	Heur2f
p11	0:00.81	0:00.43	0:00.11	---	---	---
p12	0:00.52	0:00.44	0:00.19	<0:00.01	0:00.54	0:00.18
p13	0:00.10	0:00.61	0:00.08	<0:00.01	0:03.99	0:01.57
p14	0:00.03	0:00.12	---	---	---	---
p15	0:00.03	0:00.55	0:00.70	<0:00.01	0:00.29	0:00.29
p16	0:01.10	0:00.53	0:00.06	0:00.01	0:01.37	0:07.66
p17	0:00.08	0:06.01	0:00.02	---	---	---
p18	0:00.25	0:00.20	0:00.02	<0:00.01	---	---
p19	0:00.27	0:00.18	<0:00.01	<0:00.01	0:00.57	0:00.24
p20	0:00.12	0:00.16	0:00.05	<0:00.01	0:00.21	0:00.43
p21	0:00.11	0:00.20	0:00.08	0:00.01	0:01.92	0:01.73
p22	0:00.16	0:00.19	0:00.03	<0:00.01	0:00.40	0:00.07
p23	0:00.19	0:00.25	0:00.04	<0:00.01	0:00.31	0.00.05

TABLA VI

	Du	Subg.	Heur1	Corte	Heur 2	Heur2f
p1	0:00.43	0:00.19	0:00.02	---	---	---
p2	0:00.08	0:00.15	0:00.02	---	---	---
p 3	---	---	---	---	---	---
p4	0:00.08	0:00.28	0:00.04	0:00.01	0:00.59	0:00.15
p5	0:00.32	0:00.01	0:00.01	---	---	---
p6	0:00.01	0:00.15	0:00.06	<0:00.01	0:01.02	0:00.06
p7	<0:00.01	0:00.01	0:00.01	---	---	---
p8	0:00.02	0:00.17	0:00.03	---	---	---
p9	0:00.01	0:00.07	0:00.02	---	---	---
p10	0:00.14	0:00.15	0:00.07	<0:00.01	0:00.16	0:00.11

TABLA VIII

	Du	Subg.	Heur1	Corte	Heur2	Heur2f
p24	0:01.50	0:00.28	0:00.12	<0:00.01	0:00.45	0:03.65
p25	0:01.48	0:00.27	0:00.18	---	---	---
p26	0:00.11	0:01.35	0:09.06	0:00.01	0:01.91	0.04.41
p27	0:00.66	0:01.74	0:00.11	<0:00.01	0:00.02	0:00.02
p28	0:02.08	0:00.69	0:00.38	0:00.01	0:00.87	0:09.44
p29	0:00.45	0:01.32	0:00.06	---	---	---
p30	0:00.09	0:00.16	0:00.05	<0:00.01	---	---
p31	0:03.48	0:01.97	0:11.81	0:00.01	0:02.56	1:53.78
p32	0:00.42	0:00.94	0:00.04	0:00.01	0:00.94	0:00.39
p33	0:00.19	0:02.03	0:00.03	---	---	---
p34	0:00.10	0:00.94	0:00.03	0:00.01	0:00.81	0:00.87
p35	0:00.87	0:00.97	0:00.14	<0:00.01	0:02.12	0:00.42

TABLA IX

	Du	Subg.	Heur1	Corte	Heur2	Heur2f
p36	0:00.39	0:00.99	0:00.05	0:00.01	0:00.54	0:00.54
p37	0:00.80	0:01.39	0:00.03	---	---	---
p38	---	---	---	---	---	---
p39	0:00.55	0:00.74	0:01.50	0:00.01	0:42.84	0:05.63
p40	0:00.80	0:02.13	0:02.18	0:00.01	0:32.16	0:02.42
p41	0:00.45	0:00.97	0:00.05	<0:00.01	0:16.84	0:01.77
p42	0:00.33	0:00.95	0:00.11	<0:00.01	0:13.45	0:08.67
p43	0:00.46	0:02.29	0:00.44	0:00.02	0:08.53	0:12.60
p44	0:06.27	0:00.96	0:00.17	<0:00.01	0:03.29	0:03.29
p45	0:00.19	0:00.94	0:00.07	<0:00.01	0:03.46	0:03.46
p46	0:00.64	0:03.30	0:00.35	0:00.02	0:26.34	0:26.34

TABLA X

	Du	Subg.	Heur1	Corte	Heur2	Heur2f
p47	0:20.84	0:04.90	0:00.98	0:00.02	2:24.27	1:58.44
p48	0:28.50	0:11.13	0:00.64	0:00.04	9.29.51	4:34.87
p49	0:43.05	0:18.38	0:08.37	0:00.06	17:43.53	1:56.17
p50	0:02.02	0:04.63	0:02.03	0:00.01	1:44.48	2:18.76
p51	0:38.25	0:10.53	0:01.66	0:00.03	10:53.57	0:08.52
p52	0:06.48	0:11.06	0:11.01	0:00.04	5:04.88	1:09.83
p53	0:05.50	0:10.75	0:09.17	0:00.03	5:36.27	5:40.69
p54	0:04.72	0:07.23	0:00.26	---	---	----
p55	0:12.45	0:04.15	0:08.39	0:00.02	6:28.93	15.16.95
p56	1:07.76	0!16.20	0:13.02	0:00.05	48:45.63	12:32.04

La heurística que obtiene soluciones posibles primales para los problemas ampliados, ha requerido, como puede observarse, un esfuerzo computacional que en algunos problemas, sobre todo en los de dimensiones grandes, puede resultar excesivo. Sin embargo, de forma algo inesperada, el tiempo requerido para su aplicación parece disminuir a medida que se incorpora un mayor número de desigualdades a los problemas. Ello puede, tal vez, explicarse por el hecho de que a medida que se generan desigualdades, éstas resultan cada vez más potentes (menor número de variables que intervienen en las mismas). Por ese motivo, la capacidad de elección de dicho procedimiento resulta mucho más limitada, terminando, en general, de forma más rápida.

Hay que resaltar que, para intentar obtener un procedimiento que computacionalmente resulte más rentable, se han implementado versiones diferentes de esta heurística primal menos exigentes en la obtención de la solución del subproblema de Set Covering contenido en el problema ampliado, pero estos procedimientos han proporcionado un número altísimo de fallos al intentar completar dichas subsoluciones en soluciones posibles el problema ampliado. En este sentido, consideramos que el procedimiento utilizado resulta válido en la medida que permite obtener solucines posibles de una buena calidad para los problemas ampliados. Sobre todo y, teniendo en cuenta que, en casi todos los casos, la mejor solución encontrada ha sido mediante este procedimiento. Además, este procedimiento es el que ha permitido plasmar de forma satisfactoria la información contenida en las desigualdades válidas que se han generado.

Con respecto a las desigualdades válidas obtenidas, los resultados presentados confirman el buen rendimiento de las mismas. En primer lugar, en casi todos los problemas, después de un número reducido de desigualdades, se ha mejorado la calidad de la solución posible inicial.

Es importante señalar también, que estas desigualdades han permitido mejorar la calidad de las cotas inferiores obtenidas. Como se desprende de las Tablas VI-X, la cota inferior que se tiene en la terminación del algortimo es, prácticamente en todos los casos, mejor que la obtenida en la primera iteración del mismso, cuando todavía no se había generado ninguna de estas desigualdades. Desgraciadamente, dichas mejoras no han resultado todo lo satisfactorias que se esperaba, siendo éste, en nuestra opinión, el mayor inconveniente del algoritmo que se ha utilizado.

Además, en muchas ocasiones ha sido posible eliminar variables de los mismos, con lo que los problemas obtenidos han resultado mucho más sencillos de resolver, tanto para obtener buenas soluciones primales, como para acercarse a la terminación del algoritmo. Hay que resaltar que, en la mayoría de los problemas en los que se han eliminado muchas variables, la aplicación posterior de los tests de eliminación ha proporcionado, directamente, la solución óptima. En otros problemas, en los que lo anterior no ha ocurrido, el gap final, entre la mejor solución primal y la mejor solución dual, es más pequeño que en los problemas en los que no se han eliminado tantas variables.

En definitiva, consideramos que el rendimiento del procedimiento de obtención de desigualdades válidas es altamente eficiente, tanto por los resultados que se derivan de su utilización, como por el excelente tiempo computacional que requiere su utilización.

7. CONCLUSIONES

Como comentario final al trabajo que hemos realizado hay que señalar que consideramos que el comportamiento del algoritmo básico utilizado resulta satisfactorio. Se ha podido probar la eficacia tanto de las heurísticas primales, como de las desigualdades válidas que se han utilizado. Estas desigualdades han permitido, en pocas iteraciones, obtener mejoras importantes en la calidad de las soluciones posibles primales. Además, la incorporación de todas las desigualdades obtenidas permite, en general, mejorar de forma apreciable la calidad de la cota inferior obtenida.

La utilización de la relajación lagrangiana ha permitido de forma casi sistemática la calidad de las cotas inferiores obtenidas por las heurísticas duales. Pensamos, sin embargo, que es necesario estudiar procedimientos que permitan mejorar la calidad de dichas cotas, puesto que, en definitiva son las que permiten evaluar la calidad de las cotas superiores e identificar las soluciones óptimas. En este sentido consideramos que el estudio de los métodos de refuerzo dual puede proporcionar una herramienta que permita obtener un rendimiento completamente satisfactorio de un esquema algorítmico propuesto.

BIBLIOGRAFÍA

[Bal79] **Balas, E.**, "Disjuntive programming", Annals of Discrete Mathematics 5 (1979) 3-51.

[Bal89] **Balas, E. and S.M. N.G.**, "On the set covering polytipe:I. All the facets with coefficients in $\{0,1,2\}$", Mathematical Programming 43 (1989) 57-69.

[Bal80] **Balas E.**, "Cutting Planes from Conditional Bounds; A New Approach to Set Covering". Mathematical Programmin 12, 1980, pp. 19-36.

[BaCh81] **Balas E., Christofides N.**, "A restricted Lagrangian Approach to the Travelling Salesman Problem". Mathematical Programming 12, 1980, pp.19-46.

[BaHo80] **Balas E., Ho A.**, "Set Covering Algorithms Using Cutting Planes Heuristics and Subgradient Optimization: A Computational Study". Mathematical Programming 12, 1980, pp 37-60.

[BaPa79] **Balas E., Padberg M.**, "Set Partitioning: A survey". Combinatorial Optimization, Ch 7. N. Christofides (Ed.), John Wiley, 1979, pp. 151-210.

[Fer88] **Fernández E.**, "Diseño y Estudio Computacional de Algoritmos Híbridos para Problemas de Set Partitioning". Tesis Doctoral. Facultat d'Informàtica. U.P.C., 1988.

[FiKe86] **Fisher M.L., Kedia P.**, "A Dual Algorithm for Large Scale Set Partitioning". KGSMP 894, Purdue University, Mayo 1986.

[GaNe72] **Garfinkel R.S., Nemhauser G.L.**, "Integer Programming". John Wiley, 1972.

[Lev69] **Levin A.**, "Fleet Routing and Scheduling Problems for Air Transportations Systems". Ph.D. Disertation. M.I.T. 1969.

[MaSh81] **Marsten R.E., Shepardson R.**, "Exact Solution of Crew Scheduling Problems Using the Set Partitioning Model: Recent Successful Aplications". Networks 11, 1981, pp. 165-177.

[Pie68] **Pierce J.F.**, "Application of Combinatorial Programing Algorithms for a Class of All Zero-One Integer Programming Problems". Management Science, 15, 1968, pp. 191-209.

[Sal75] **Salkin H.M.**, "Integer Programming", Addison-Wesley, Reading,Mass, 1975.