QÜESTIIÓ, Vol 14, nº 1,2,3 pp. 123-137, 1990

ELEMENTOS PARA EL CÁLCULO DE COSTES FIJOS Y VARIABLES DE ELEMENTOS PRODUCTIVOS

ALBERT COROMINAS

Universitat Politècnica de Catalunya

Los costes fijos y variables de un elemento productivo dependen de la política de renovación del elemento y de la intensidad de utilización del mismo. En el artículo se estudia esta dependencia y se establecen expresiones para el cálculo del coste fijo y de una parte del coste variable.

Elements for Calculating Fixed and Variable Costs of Productive Elements

Keywords: Fixed and Variable Costs, Renewal

1. INTRODUCCIÓN

La posesión y utilización de un sistema productivo o de un elemento de un sistema productivo, como una máquina o un componente de una máquina, implica unos costes en los que cabe distinguir dos componentes, a saber, el coste fijo y el coste variable. El primero es la parte del coste que no depende de la intensidad de utilización del elemento; el segundo, por el contrario, y como es lógico, es la parte del coste debida al hecho de hacer funcionar el elemento con mayor o menor intensidad. Esta distinción es bien conocida y se encuentra en numerosos textos (por ejemplo, en **Riggs**).

–Departament d'Organització d'Empreses. U.P.C.

–Article rebut el novembre de 1989.

Si un sistema produce un solo artículo o diversos artículos homogéneos, la intensidad de utilización del sistema se puede expresar a través de la cantidad de unidades producidas en el período que se considere (un año, por ejemplo). Si se denomina q a dicha cantidad y C al coste total del sistema para el período, se puede escribir:

$$C(q) = K + V(q)$$

donde K es el coste fijo y $V(q)$ el variable. Evidentemente:

$$V(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad K = C(0)$$

El coste marginal, para un nivel de producción dado es, pues:

$$c(q) = C(q+1) - C(q) = V(q+1) - V(q)$$

o, si q es una variable real y la función $V(q)$ es derivable:

$$c(q) = \frac{dC(q)}{dq} = \frac{dV(q)}{dq}$$

Dicho coste marginal puede ser o no constante, según se comentará con más detalle más adelante.

La expresión "cantidad producida" se utiliza aquí en un sentido muy amplio. En cada caso la unidad será la que convenga para expresar la intensidad de utilización del elemento productivo (una pieza, 1000 piezas, una operación o un conjunto de operaciones, un Km – en el caso de un vehículo –, etc.).

En los sistemas complejos, por otra parte, deberá considerarse cada uno de sus elementos y sumar los costes correspondientes.

El coste fijo y el coste variable intervienen en distintos tipos de decisiones. Por ejemplo, con un coste variable proporcional a la cantidad producida (es decir, con coste marginal constante) el coste fijo es el único relevante para determinar cuántas maquinas son necesarias para producir una cantidad determinada a un coste mínimo; en cambio, para optimizar el beneficio, con un número de máquinas dado y una demanda prácticamente ilimitada, en la decisión interviene el coste variable pero no el coste fijo.

La atribución de valores numéricos al coste fijo y al coste variable es, pues, de importancia para el diseño del sistema productivo. Se suele considerar que el coste marginal es constante (ver, por ejemplo, **Stafford Jr.**, o casi todos los trabajos sobre asignación de máquinas) y ello puede ser cierto para algunos componentes de dicho coste (como el consumo de energía por unidad producida), pero no para otros: en particular, la repercusión de los costes de renovación no es constante, en general, y además depende de la política de renovación que se adopte.

De hecho, el coste variable, $V(q)$, puede considerarse como la suma de dos componentes, a saber, el que corresponde a los recursos fungibles (energía, lubricantes, etc.), $u(q)$, y el que corresponde al elemento productivo, $v(q)$, el cual depende, como se ha dicho, de la política de renovación del elemento:

$$V(q) = u(q) + v(q)$$

La función $u(q)$, que muchas veces será lineal, se puede considerar como un dato técnico, característico del elemento de que se trate. El objetivo del presente trabajo consiste, fundamentalmente, en el estudio del componente $v(q)$.

2. MODELO GENERAL

Se asume en lo que sigue la hipótesis de ausencia de desarrollo tecnológico (por lo que el elemento se substituye, cuando corresponda según la política de renovación adoptada, por otro idéntico) y que dicha política de renovación está definida por una función:

$$T = f(Q^0, t^0, q)$$

con la notación siguiente:

Q^0 : cantidad producida por el elemento hasta el instante de referencia, origen de tiempos.

t^0 : edad del elemento en dicho instante.

q : tasa de producción (unidades por período), supuesta constante en el tiempo.

T : fecha de renovación del elemento.

Lógicamente:

$$\frac{\delta T}{\delta Q^0} \leq 0, \quad \frac{\delta T}{\delta t^0} \leq 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{\delta T}{\delta q} \leq 0$$

Dado un valor de q, $\hat{q}$, el elemento se renovará en los instantes:

$$\tau(\hat{q}), \tau(\hat{q}) + \theta(\hat{q}), \tau(\hat{q}) + 2\theta(\hat{q}), \cdots, \tau(\hat{q}) + k\theta(\hat{q}), \cdots$$

con k entero positivo y:

$$\begin{aligned} \tau(\hat{q}) &= f(Q^0, t^0, \hat{q}) \\ \theta(\hat{q}) &= f(0, 0, \hat{q}) \end{aligned}$$

que son los plazos de renovación en régimen transitorio y permanente, respectivamente.

Por lo cual, si el valor residual del elemento, dados Q^0 y t^0, es r, el coste de adquisición de un elemento nuevo es R y el coeficiente de actualización es α [$\alpha = 1/(1+i)$, donde i es la tasa de interés], el coste actualizado correspondiente al conjunto de sucesivas substituciones del elemento por otro idéntico, considerando un horizonte ilimitado, es:

$$\text{VAN} = r + R \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{\tau(\hat{q}) + k\theta(\hat{q})} = r + R \frac{\alpha^{\tau(\hat{q})}}{1 - \alpha^{\theta(\hat{q})}}$$

equivalente a una anualidad $A(\alpha, q)$ tal que:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} A(\alpha, q) = \text{VAN}$$

o sea:

$$A(\alpha, \hat{q}) = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left[r + R \frac{\alpha^{\tau(\hat{q})}}{1 - \alpha^{\theta(\hat{q})}} \right]$$

Expresión válida para $\alpha < 1$; para $\alpha = 1$, y en el mismo supuesto de horizonte ilimitado, simplemente:

$$A(1, q) = \frac{R}{\theta(q)}$$

El coste fijo K es la anualidad correspondiente a $\hat{q} = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} K &= A(1,0) = \frac{R}{\theta(0)} \quad \text{para } \alpha = 1 \quad \text{y} \\ K &= A(\alpha,0) = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[r + R\frac{\alpha^{\tau(0)}}{1-\alpha^{\theta(0)}}\right] \quad \text{para } \alpha < 1 \end{aligned}$$

por lo cual, para $\alpha = 1$:

$$v(\hat{q}) = R[1/\theta(\hat{q}) - 1/\theta(0)]$$

y, para $\alpha < 1$:

$$v(\hat{q}) = \frac{1-\alpha}{\alpha} R \left[\frac{\alpha^{\tau(\hat{q})}}{1-\alpha^{\theta(\hat{q})}} - \frac{\alpha^{\tau(0)}}{1-\alpha^{\theta(0)}}\right]$$

Expresiones que permiten calcular el coste fijo y el variable, dadas una política de renovación y una tasa de producción.

3. DOS APLICACIONES DEL MODELO GENERAL

En la práctica, muchas políticas de renovación se definen por la edad del elemento o su producción acumulada en el momento de proceder a la substitución. Aquí, concretamente, se considerará las tres políticas siguientes:

iE. Substituir el elemento cuando alcanza la edad E.

iN. Substituir el elemento cuando la producción acumulada obtenida con el mismo alcanza el valor N.

ii. Substituir el elemento cuando alcanza la edad E o cuando la producción acumulada alcanza el valor N.

Las políticas *iE* e *iN* se pueden tratar conjuntamente si se utiliza la función:

$$T = \frac{E - t^0 - \frac{Q^0}{N}E}{1 + \frac{\hat{q}}{N}E}$$

que corresponde a reponer el elemento cuando la suma de su edad más un período por cada N/E unidades producidas (suma que puede denominarse "edad ficticia" considerando que producir N/E unidades es equivalente a envejecer un período) es igual a E. Coincide con la política iE haciendo $1/N = 0$ y con la iN haciendo $1/E = 0$. Si la política de renovación corresponde a esta función diremos que se sigue la política i.

A continuación se aplica el modelo general establecido en el punto 2 a las políticas i y ii.

Política i:

Es inmediato que:

$$\tau(0) = E - t^0 - \frac{Q^0}{N} E; \quad \theta(0) = E$$

$$\tau(\hat{q}) = \frac{E - t^0 - \frac{Q^0}{N} E}{1 + \frac{\hat{q}}{N} E}; \quad \theta(\hat{q}) = \frac{E}{1 + \frac{\hat{q}}{N} E}$$

Por consiguiente, para $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} K &= R/E \\ v(\hat{q}) &= R\hat{q}/N \end{aligned}$$

y, para $\alpha < 1$ las expresiones que resultan de substituir en las establecidas con carácter general en el punto 2.

La política iE es, como se ha dicho, un caso particular de la política i con $1/N = 0$; entonces:

$$T = E - t^0$$

es decir, renovar cuando el elemento alcanza la edad E.

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \tau(0) &= \tau(\hat{q}) = E - t^0 \\ \theta(0) &= \theta(\hat{q}) = E \end{aligned}$$

En este caso, para $\alpha = 1$:

$$K = R/E; \quad v(\hat{q}) = 0$$

y, para $\alpha < 1$:

$$K = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[r + R\frac{\alpha^{E-t^0}}{1-\alpha^E}\right]; \quad v(\hat{q}) = 0$$

En cuanto a la política iN, se define por:

$$T = \frac{N - Q^0}{\hat{q}}$$

lo que corresponde a renovar el elemento cuando su producción total, $Q^0 + T\hat{q}$ alcanza el valor N.

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \tau(0) &= \theta(0) = \infty \\ \tau(\hat{q}) &= \frac{N - Q^0}{q}; \qquad \theta(\hat{q}) = N/\hat{q} \end{aligned}$$

En este caso, para $\alpha = 1$:

$$K = 0; \; v(q) = R\hat{q}/N$$

y, para $\alpha < 1$:

$$K = \frac{1-\alpha}{\alpha} r; \quad v(\hat{q}) = \frac{1-\alpha}{\alpha} R\frac{\alpha^{[N/\hat{q}-Q^0/\hat{q}]}}{1-\alpha^{N/\hat{q}}}$$

Política ii:

Definida por:

$$T = \min\left[E - t^0, \frac{N - Q^0}{\hat{q}}\right]$$

que, como se ha dicho, corresponde a renovar el elemento si alcanza la edad E *o* si su producción alcanza el valor N.

Para esta política:

$$\tau(0) = E - t^0;\ \theta(0) = E$$

y, en lo que respecta a $\tau(\hat{q})$ y $\theta(\hat{q})$, hay que distinguir los cuatro casos siguientes:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \hat{q} \leq N/E \text{ y } \hat{q} \leq \frac{N - Q^0}{E - t^0}; \quad \text{entonces :}\\
&\qquad \tau(\hat{q}) = E - t^0;\ \theta(\hat{q}) = E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2) \quad \hat{q} \leq N/E \text{ y } \hat{q} \geq \frac{N - Q^0}{E - t^0}; \quad \text{entonces :}\\
&\qquad \tau(\hat{q}) = \frac{N - Q^0}{\hat{q}};\ \theta(\hat{q}) = E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(3) \quad \hat{q} \geq N/E \text{ y } \hat{q} \leq \frac{N - Q^0}{E - t^0}; \quad \text{entonces :}\\
&\qquad \tau(\hat{q}) = E - t^0;\ \theta(\hat{q}) = N/\hat{q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(4) \quad \hat{q} \geq N/E \text{ y } \hat{q} \geq \frac{N - Q^0}{E - t^0}; \quad \text{entonces :}\\
&\qquad \tau(\hat{q}) = \frac{N - Q^0}{\hat{q}};\ \theta(\hat{q}) = N/\hat{q}
\end{aligned}$$

La discusión se simplifica si $Q^0 = 0$ y $t^0 = 0$, con lo que $\theta(q) = \tau(q)\ \forall q$ y, en particular, $\theta(0) = \tau(0) = E$. Sólo hay que distinguir dos casos:

(1) $\hat{q} \leq N/E$
$\theta(\hat{q}) = \tau(\hat{q}) = E$
que coincide con la política iE con $t^0 = 0$

(2) $\hat{q} \geq N/E$
$\theta(\hat{q}) = \tau(\hat{q}) = N/\hat{q}$
que coincide con la política iN con $Q^0 = 0$

Por supuesto, las expresiones anteriores permiten estudiar, salvo lo que respecta al componente $u(q)$ del coste variable, el coste medio por pieza, el coste variable medio $[v(\hat{q})/\hat{q}]$ así como el coste marginal, $v'(\hat{q})$.

En las figuras se han representado estas magnitudes para la política i y los valores que se indica de E, N y α [con $t^0 = 0$ y $Q^0 = 0$]. Por supuesto, el coste medio es muy sensible al valor de $\hat{q}$. Obsérvese el comportamiento del coste marginal, para $\alpha < 1$ y valores bajos de $\hat{q}$.

4. CONCLUSIONES

Los costes fijos y variables no pueden determinarse a partir sólo de las características del elemento productivo y de la tasa de interés. El coste fijo y un componente del coste variable dependen de la política de renovación del elemento y de la intensidad de utilización del mismo. Dadas una y otra, se ha establecido un procedimiento para determinar el coste fijo y dicho componente del coste variable.

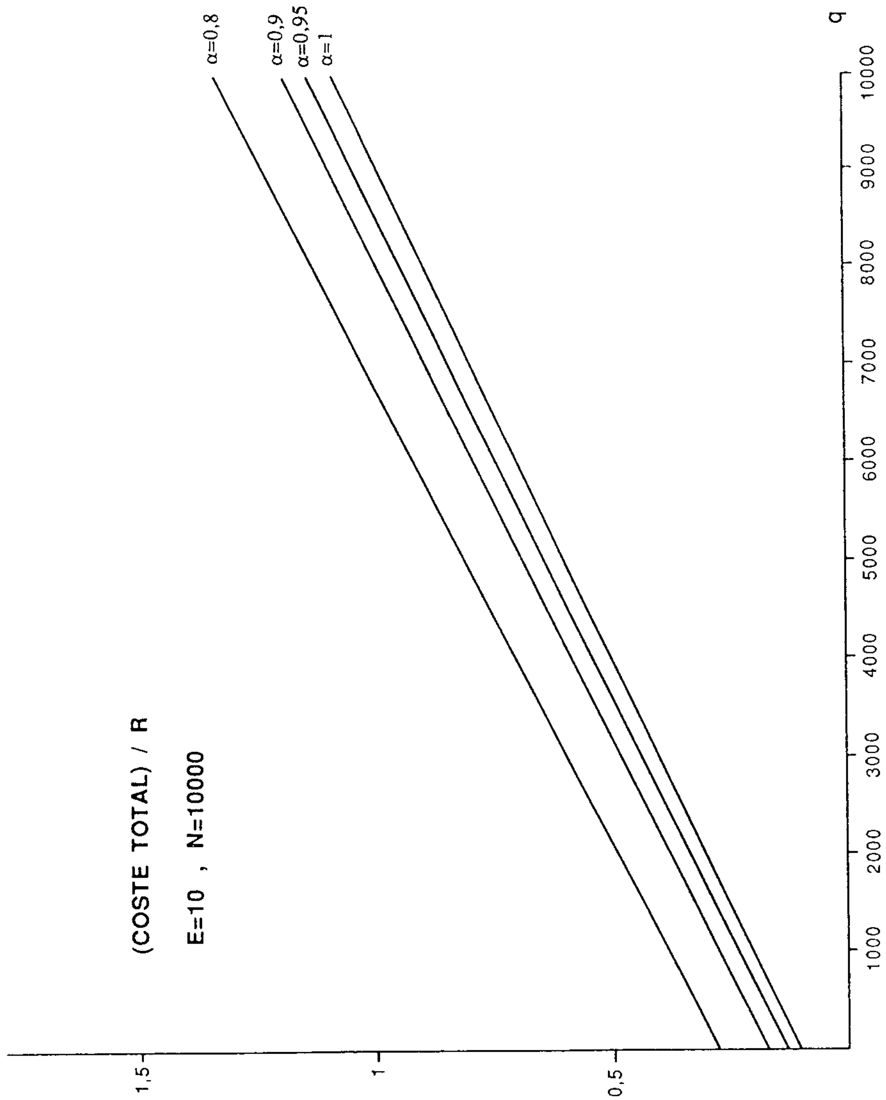
(COSTE TOTAL) / R
E=10 , N=10000
α=0,8
α=0,9
α=0,95
α=1
q
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
0,5
1
1,5

Figura 1.

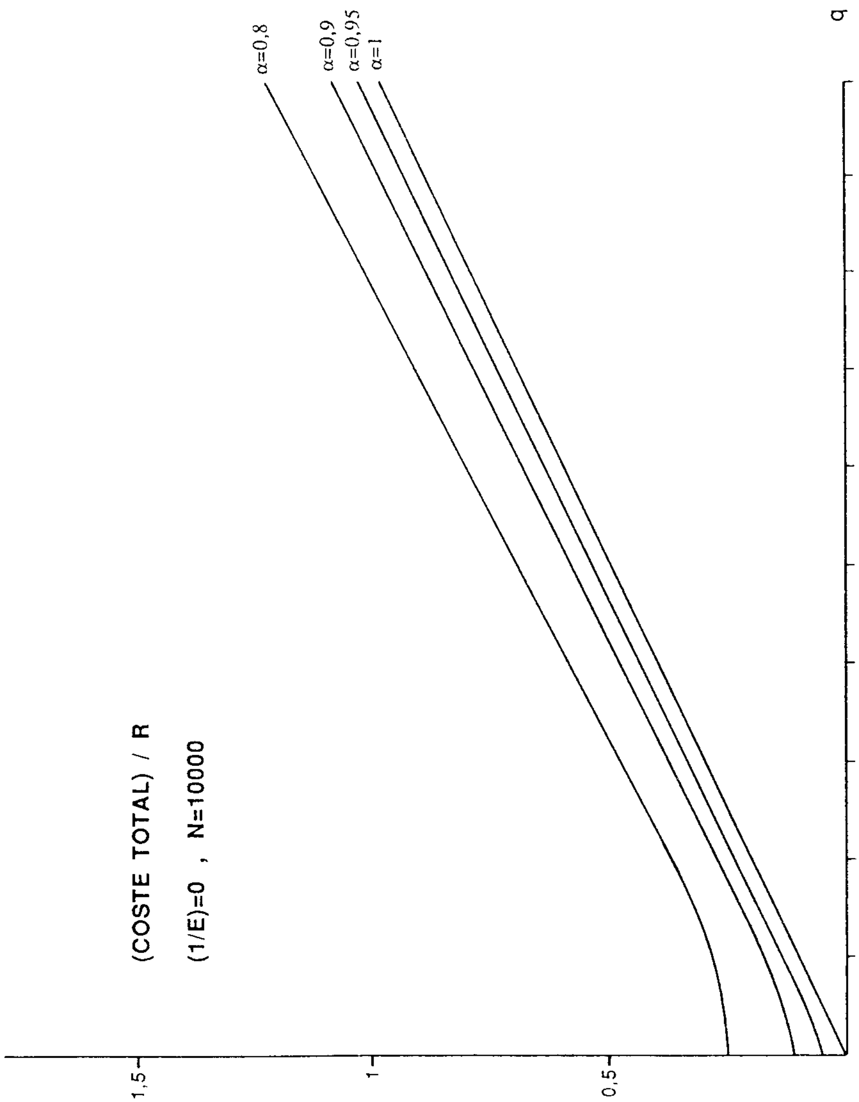
(COSTE TOTAL) / R
(1/E)=0 , N=10000
α=0,8
α=0,9
α=0,95
α=1
q
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
1,5
1
0,5

Figura 2.

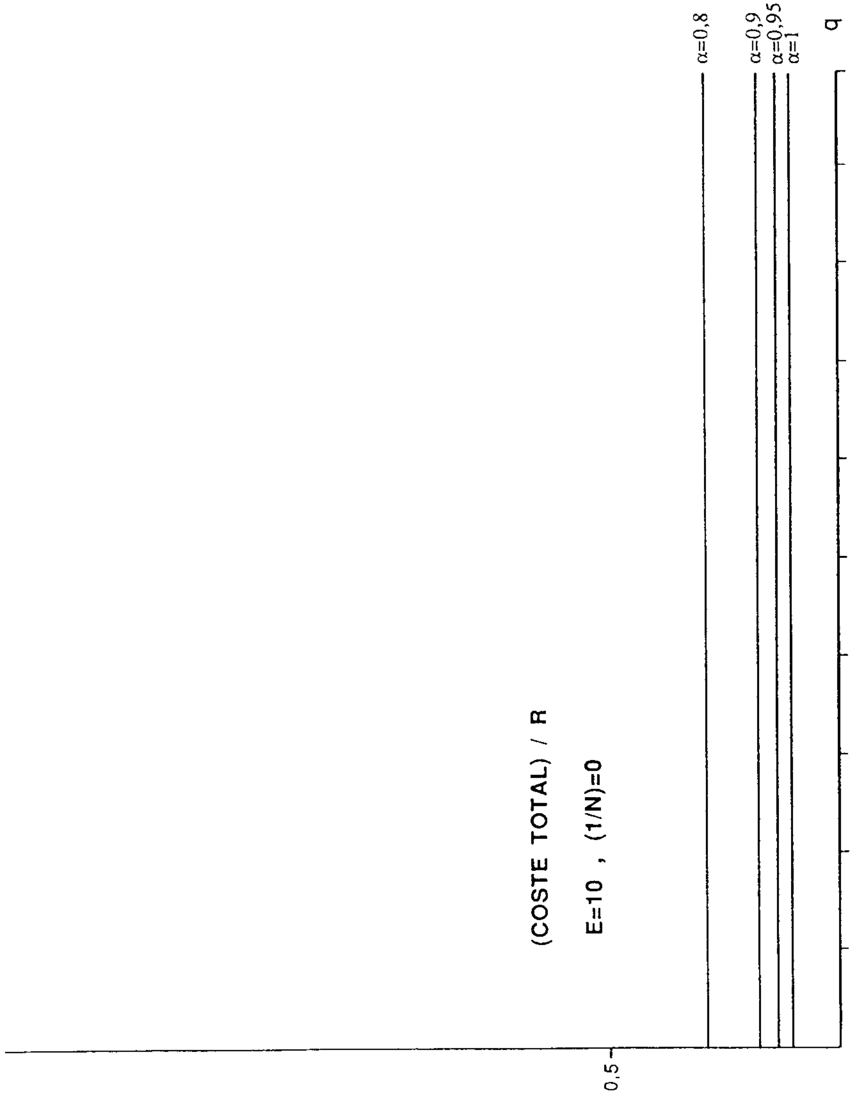
(COSTE TOTAL) / R
E=10 , (1/N)=0
α=0,8
α=0,9
α=0,95
α=1
q
0,5
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

Figura 3.

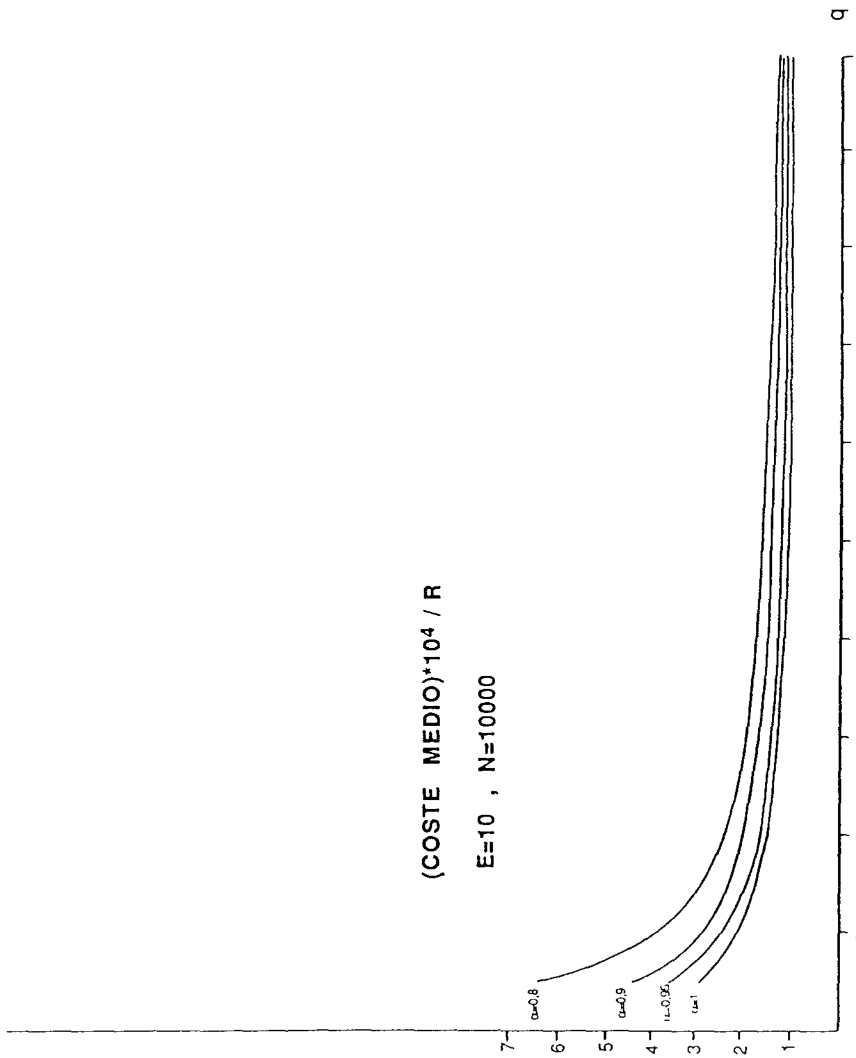
(COSTE MEDIO)*10⁴ / R
E=10 , N=10000
α=0,8
α=0,9
α=0,95
α=1
7
6
5
4
3
2
1
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
q

Figura 4.

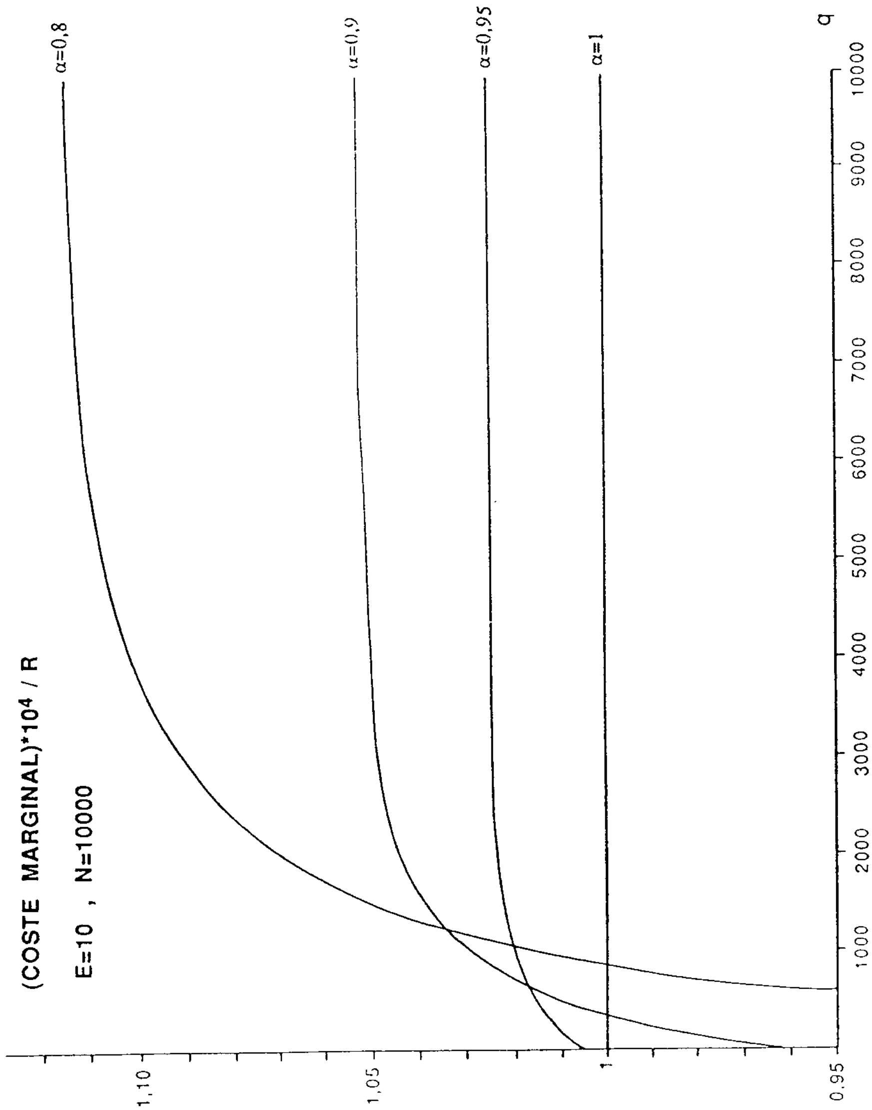
(COSTE MARGINAL)*10^4 / R
E=10 , N=10000
α=0,8
α=0,9
α=0,95
α=1
q
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
0,95
1
1,05
1,10

Figura 5.

5. REFERENCIAS

[1] **Riggs, J.L.** (1973). "Modelos de decisión económica para ingenieros y gerentes de empresa". Alianza.

[2] **Stafford Jr., E.F.** (1988). "An Optimal Solution Technique for the Operator–Machine Assignment Problem". *Production and Inventory Management Journal,* vol. 29, n. 3, Third Quarter 1988, 25-31.

6. AGRADECIMIENTO

Al profesor Ramón Companys por su atenta lectura del manuscrito de este trabajo y por las atinadas observaciones que ha formulado a raíz de la misma. Por supuesto el autor asume la responsabilidad de cualquier error que pudiera subsistir.