QÜESTIIÓ, Vol 15, 2. pp. 199-210, 1991

MODELO DE LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS DE EXTINCIÓN DE INCENDIOS

ANNA M. COBES Y RAMÓN COMPANYS

Universitat Politècnica de Catalunya

El modelo propuesto es un modelo lineal de recubrimiento, permite varias categorías de parques, limitaciones de capacidad y de infrautilización, un r-cubrimiento para las celdas que se especifiquen, y una ponderación de las celdas por un índice de peligrosidad de incendios. Se ha realizado una aplicación en la zona de Martorell y Castellví de Rosanes (Barcelona).

A Fire Emergency Service Location Model.

Keywords: Localización de servicios de extinción de incendios, Modelo lineal de cubrimiento.

1. INTRODUCCIÓN

El modelo que se describe a continuación surgió a raiz de un estudio realizado para obtener una propuesta de metodología, que permitiera la localización de las instalaciones de los Servicios de Extinción de Incendios (S.E.I.), de la forma más razonable posible (Cobes, 1990). Dicho estudio incluye la propuesta de un modelo de localización, que es el que se describe en este artículo.

Anna M. Cobes i Ramón Companys. Dept. d'Organització d'Empreses. E.T.S.E.I.B. Diagonal, 647. 08028 Barcelona.

–Article rebut el gener de 1990.

2. TERMINOLOGÍA

2.1 Parámetros

m	número de focos de alarma,
n	número de posibles localizaciones,
p	número de instalaciones a localizar,
$c(ij)$	coste por unidad de distancia existente entre la instalación j, y el foco i,
$f(j)$	coste fijo de inversión si se localiza una instalación j,
$cf(j)$	coste fijo actual de operación de la localización j,
$cv(j)$	coste variable actual de operación, de la localización j,
$d(ij)$	distancia del foco i, a la instalación j,
$d'(i)$	distancia máxima del foco i a la instalación asignada,
$t'(i)$	tiempo máximo de acceso del foco i, a la instalación asignada,
$t(ij)$	tiempo medio de respuesta, de la instalación ubicada en j, hasta el foco i,
$b(i)$	ponderación del foco i (puede incluir población, índice de peligrosidad, ...),
$b(j)$	ponderación de la ubicación j,
$b(ij)$	ponderación de la asignación del foco i, a la instalación j,
$b(jk)$	ponderación de las interacciones entre las instalaciones j y k,
$p(i)$	índice de peligrosidad del foco i,
$e(ij)$	índice de molestia para el foco i de situar una instalación en j,
$v(jk)$	frecuencia de interacciones entre j y k,
$n'(j)$	capacidad de la instalación j,
$n''(j)$	utilización mínima de la instalación j,
$N(i) =$	$[j$, tal que $d(ij) \leq d'(i)$ ó $t(ij) \leq t'(i)]$, conjunto de ubicaciones posibles que están a una distancia o tiempo máximo establecido, $d'(i)$ o $t'(i)$,
$N(i,k)$	conjunto de ubicaciones posibles de parques de categoría k, que están a una distancia/tiempo máximo $d'(i)/t'(i)$,
$I(r)$	conjunto de focos de alarmas que requieren un r-cubrimiento, (p.e. si $r = 2$, necesitan dos instalaciones a una distancia/tiempo de $d'(i)/t'(i)$),
K	número de categorías a considerar de las instalaciones,
$S(j)$	conjunto de categorías posibles de instalaciones a ubicar en j,
$r(k)$	número de instalaciones a ubicar de la categoría k,
M	número suficientemente grande, respecto al resto de coeficientes de la restricción en donde aparece (la gran M).

2.2 Variables

$y(j)$	variables binaria con valor 1 si en j se ubica una instalación, y cero en caso contrario,
$y(jk)$	variable binaria con valor 1 si en j se ubica una instalación de categoría k, y cero en caso contrario,
$x'(ij)$	variable binaria con valor 1 si al foco i se le asigna la instalación situada en j, y cero en caso contrario,
$x'(ijk)$	variable binaria con valor 1 si el foco i, es atendido por la instalación j de la categoría k, y cero en caso contrario,
$z(i)$	variable binaria que adquiere el valor 1 si el foco i dispone de una instalación j tal que $j \in N(i)$,
u	variable continua que linealiza el concepto Minimax,
$l(jk)$	variable binaria asociada al monomio binario $y(j) \cdot y(k)$.

3. MODELO BÁSICO PROPUESTO

En este apartado se introducen en primer lugar las posibilidades que tiene el modelo de adoptar distintos criterios de localización (considerando sólo uno cada vez), dando lugar a distintas funciones objetivo. A continuación se introducen las posibilidades del modelo en cuanto a la consideración de algunas de las limitaciones más usuales que aparecen en la localización de Servicios de Extinción de Incendios. Por último se presenta la formalización matemática del modelo básico genérico.

3.1 Función Objetivo

Los criterios que puede adoptar el modelo pueden ser clasificados en cinco grupos, en un primer grupo el objetivo es minimizar costes, en un segundo grupo es minimizar el tiempo de respuesta, en un tercer grupo el objetivo es maximizar una ponderación de los focos que se consideran bien atendidos, el cuarto grupo tiene como objetivo minimizar las molestias ocasionadas al localizar las instalaciones, el quinto grupo utiliza un objetivo de equitatividad que corresponde a la utilización del criterio Minimax.

Exceptuando el grupo tercero que corresponde a la búsqueda de un máximo, el resto de los objetivos conducen a minimizar, es fácil transformar el objetivo del tercer grupo a la búsqueda de un mínimo para uniformizar formatos, con este concepto el tercer grupo se plantea con una función objetivo consistente en una ponderación de los focos considerados mal atendidos. A partir de este momento el objetivo de todos los criterios comentados pasa a ser Minimizar una función. Veamos qué ocurre dentro de cada grupo y cuál será su formalización en nuestro modelo.

Primer Grupo: *Minimizar costes.*

Analizando los costes posibles se distinguen: costes de desplazamiento entre instalación y foco; costes de desplazamiento entre instalación e instalación; costes de inversión, que en nuestro caso básico únicamente corresponden a coste fijo; costes de operación, que incluyen los dos costes citados en primer lugar, tienen una componente fija y una variable.

— Coste de inversión de localizar una instalación en j

$$f(j)\,y(j) \tag{1}$$

— Coste de desplazamiento entre instalación y foco

$$c(ij)\,p(i)\,x'(ij)\,d(ij) \tag{2}$$

o de forma simplificada

$$b(ij)\,x'(ij) \tag{2bis}$$

— Coste de desplazamiento entre dos instalaciones

$$c(jk)v(jk)d(jk)y(j)y(k) \tag{3}$$

o de forma simplificada

$$b(jk)\,l(jk) \tag{3bis}$$

— Coste fijo de operación para la instalación j

$cf(j)y(j)$ coeficiente indicador del número de operaciones que realiza la instalación j en una unidad de tiempo a especificar.

Segundo Grupo: *Minimizar el tiempo de respuesta.*

En este caso se trata de intentar minimizar el tiempo de respuesta medio que se obtiene ponderando los focos de alarmas a través del índice de peligrosidad.

(4) $$\left(1/\sum_i p(i)\right) \sum_j \sum_i p(i) t(ij) x'(ij)$$

o de forma simplificada

(4bis) $$\sum_j \sum_i b(ij)\, x'(ij)$$

Tercer Grupo: *Minimizar los focos ponderados mal atendidos.*

Si no es posible garantizar el nivel de servicio que se ha propuesto, es decir con el número de instalaciones a ubicar es imposible que todo foco de alarma esté a una distancia/tiempo inferior al propuesto, el objetivo en este caso pasa a ser minimizar los focos ponderados que no tienen el nivel de servicio deseado.

(5) $$\sum_i b(i)\,[1 - z(i)]$$

Cuarto Grupo: *Minimizar las molestias.*

Si existe una reacción negativa a la ubicación de las instalaciones, puede ser indicado un objetivo como el de este grupo.

(6) $$\sum_j \left[\sum_i e(ij)\right] y(j)$$

Quinto Grupo: *Minimizar el máximo coste, Minimizar el máximo tiempo de respuesta, Minimizar la máxima molestia.*

Los criterios de este grupo están guiados por la idea general de equitatividad, el foco que saldría menos beneficiado con la localización efectuada, que sea lo menos perjudicado posible. Las funciones objetivo correspondientes no son lineales, pero su linealización es sencilla. En todo caso la modelización lineal se construye mediante una variable continua a minimizar, y acotada inferiormente por m restricciones, una correspondiente a cada foco.

Comentarios a la función objetivo: Se observa que las variables que influyen en la función objetivo son en el primer grupo las $y(j)$, $x'(ij)$, en el segundo grupo las $x'(ij)$, en el tercero las $z(i)$, en el cuarto las $y(j)$ y en el quinto la variable u. En el primer grupo si se considera que existen interacciones entre instalaciones, la función objetivo planteada no es lineal, será preciso utilizar el concepto de linealización de un monomio binario, lo cual implica incorporar al modelo por un lado una nueva variable binaria ($l(jk)$), que ya aparece en la forma simplificada de la expresión (3), y por el otro dos restricciones, que más adelante se explicitan en (15). Con la última corrección citada todas las funciones objetivo son lineales.

3.2 Restricciones

En cuanto al conjunto de restricciones de nuestro modelo podemos considerar la modelización de las siguientes limitaciones:

— Restricciones de capacidad y de utilización mínima:

R1-A

(7) $$\sum_i p(i)\, x'(ij) \leq n'(j) \qquad j = 1, \cdots, n$$

R1-B

(8) $$\sum_i p(i)\, x'(ij) \geq n''(j) - M(1 - y(j)) \qquad j = 1, \cdots, n$$

— Cada foco de incendio deber ser asignado a una instalación

R2

(9) $$\sum_i x'(ij) = 1 \qquad i = 1, \cdots, m$$

(10) $$0 \leq x'(ij) \leq y(j) \qquad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n$$

— Restricciones que garantizan un cierto nivel de servicio:

R3-A

(11a) $$\textstyle\sum_{j \in N(i)} y(j) \geq 1 \quad i = 1, \cdots, m$$

R3-B

(11b) $\sum_{j \in N(i)} y(j) \geq r \quad i \in I(r)$ caso de desear un $r-$cubrimiento para ciertos focos

R3-C

(12) $$\sum_{j \in N(i)} x'(ij) \leq M \cdot z(i) \quad i = 1, \cdots, m$$

— Si el número de instalaciones es conocido, la restricción a incorporar es:

R-4

(13) $$\sum_j y(j) = p$$

— Si el presupuesto es limitado

R-5

(14) $$\text{Coste total } \leq P$$

— Si existen interacciones entre instalaciones (g pares de interacciones), será necesario considerar las dos restricciones siguientes para cada pareja.

(15) $$y(j) + y(k) - 1 \leq l(jk) \leq 1/2\,[y(j) + y(k)]$$

3.3 Complejidad del Modelo

Variables continuas:	
	1, asociada al caso Minimax
Variables binarias:	$n + m$, corresponden a las $y(j)$, $z(i)$ $n \times m$, corresponden las $x'(ij)$ g, corresponde a considerar interacciones entre instalaciones (g monomios binarios)
Restricciones:	$2n$, asociadas a limitaciones de capacidad y de utilización $m + m \times n$, de R-2 1, de presupuesto m, de garantía de nivel de servicio 1, asociada al número de instalaciones conocido $2g$, asociadas a la linealización monomios binarios

La magnitud del modelo depende del producto $n \times m$, en general $m >> n$, en cuyo caso quien indica el orden de complejidad es el número de focos alarma. Considerando 100 lugares de posible instalación, y 200 focos de alarma, obtendríamos: del orden de 20.000 variables y 20.000 restricciones.

4. AMPLIACIONES DEL MODELO BÁSICO

Se citan a continuación 3 extensiones del modelo básico, que son objeto de estudios posteriores.

1) Si se incluyen distintos niveles de servicio, utilizando las variables $y(js)$ que corresponden a las $y(j)$ para el nivel s, será interesante considerar R-6

R-6

$$(16) \qquad \textstyle\sum_{j \in N(is)} y(js) \geq 1 \qquad i = 1, \cdots, m, \quad s = 1, \cdots, S$$

caso de existir varios niveles de servicio y querer garantizar que exista una instalación de cada nivel para cada foco dentro de la distancia/tiempo máxima para cada nivel.

2) Al considerar el tiempo de acceso como variable aleatoria, puede interesar incorporar una restricción que garantice que la probabilidad de que el tiempo de acceso de la instalación j al foco de alarma i sea inferior a un valor estipulado $t'(i)$, no supere a una cota de probabilidad $\tau(i)$

R-7

$$(17) \qquad [\text{prob } t(ij) \leq t'(i)] \leq \tau(i) \qquad i = 1, \cdots, m \text{ para } j \text{ tal que } y(j) = 1$$

En cuanto a la restricción R-7 se necesita estimar la probabilidad de que el tiempo de acceso de j a i sea inferior a $t'(i)$, siendo deseable que la restricción obtenida sea lineal. Queda pendiente este punto.

3) Una ampliación del modelo básico importante es el introducir más de un criterio de optimización, formulando un modelo multicriterio, modelo que queda fuera, en estos momentos, de nuestro objetivo, pero que naturalmente da pie a futuros estudios.

5. FORMALIZACIÓN DEL MODELO

$$(18) \qquad [\text{MIN}] \quad \begin{array}{l} \sum \sum b(ij)\, x'(ij) \quad \text{ó} \\ \sum b(j) y(j) \quad \text{ó} \\ \sum b(i) z(i) \quad \text{ó} \\ u \quad \text{ó} \\ \sum \sum b(jk) y(j) y(k) \end{array}$$

$$(19) \qquad \sum_i p(i)x'(ij) \leq n'(j) \qquad j = 1, \cdots, n$$

$$(20) \qquad \sum_i p(i)x'(ij) \geq n''(j) - M(1 - y(j)) \qquad j = 1, \cdots, n$$

$$(21) \qquad \sum_j x'(ij) = 1 \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$(22) \qquad x'(ij) \leq y(j) \qquad i = 1, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, n$$

$$(23) \qquad \sum_{j \in N)i)} y(j) \geq 1 \quad \text{ó} \quad r \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$(24) \qquad \sum_j y(j) = p$$

$$(25) \qquad y(j) + y(k) - 1 \leq l(jk) \leq 1/2\,[y(j) + y(k)] \quad (jk) = 1, \cdots, g$$

$$(26) \qquad \sum_{j \in N(i)} x'(ij) \leq M \cdot z(i) \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$u \geq \text{ expresión de la que se quiere el valor máximo } j = 1, \cdots, n$$

$$(27) \qquad k = 1, \cdots, K$$

6. RESOLUCIÓN: GENERALIDADES Y APLICACIÓN

El objeto del estudio, como se ha indicado en la introducción, era crear una metodología de localización de S.E.I., en esta metodología tiene gran importancia el modelo propuesto, que ha sido descrito en este artículo. Para validar la metodología y el modelo fue necesario aplicar la metodología a un caso concreto. Por la accesibilidad de la información y por ser una zona que permitía valorar las distintas fases de la metodología, inclusive método de cálculo del índice de peligrosidad en sus vertientes industrial, forestal y residencial, se aplicó la metodología a los municipios de Martorell y de Castellví de Rosanes (Barcelona).

La resolución del modelo depende en gran modo de las características del caso concreto, si se considera el caso general en donde figuran todas las variables y restricciones abordar la resolución por un método exacto, como es la programación lineal binaria es prácticamente imposible para valores de $n \times m$ superiores a 800, con el hardware y software disponible para realizar este trabajo. Para resolver el modelo de forma exacta en problemas de magnitud inferior a la citada, puede utilizarse un paquete de programación lineal binaria como es

Público. Para una zona reducida (a nivel comarcal), es posible resolver el modelo a través de métodos exactos. Para una zona más amplia (a nivel autonómico), es preciso acudir a métodos heurísticos.

El modelo básico puede y necesita ser ampliado incluyendo las ampliaciones citadas en el apartado 3). Los métodos heurísticos aplicables a modelos de recubrimiento deben ser estudiados, y en su caso adaptados a la resolución del modelo básico, con miras a una aplicación más amplia de la metodología.

8. REFERENCIAS

[1] **Francis** y **White** (1974). "Discrete Plant Location and Covering problems". *Facility layout and Location.* Prentice Hall.

[2] **Cobes Moreno, A.M.** (1989). "Propuesta de una metodología para obtener una localización de los Servicios de Extinción de Incendios. Evaluación de la metodología en Cataluña". Tesis Doctoral E.T.S.E.I.B.-Universitat Politècnica de Catalunya.