QÜESTIIÓ, Vol 15, 3. pp. 307-348, 1991

SOBRE L'OPTIMITZACIÓ DE LA PRODUCCIÓ HIDROELÈCTRICA AMB APORTACIONS NATURALS D'AIGUA ALEATÒRIES

AURELI ALABERT I ROMERO

Universitat Politècnica de Catalunya

En aquest article estudiem un mètode recentment proposat per Narcís Nabona per a l'optimització de la gestió dels recursos hidroelèctrics en un sistema d'embassaments sota condicions d'estocasticitat. El mètode es basa en la transferència del problema estocàstic a un problema determinista que pot ser tractat per tècniques de fluxos multiarticle no lineals sobre xarxes.

Estem interessats aquí en examinar amb detall el mecanisme d'aquesta transferència i en la seva justificació des del punt de vista probabilístic, deixant de banda la qüestió de l'adequació del model, extensament estudiada per Nabona amb anterioritat.

Comencem fent una descripció completa del problema, que inclou la construcció d'una funció objectiu força general dependent del cost de generació d'energia hidroelèctrica i de la política escollida per al moviment de l'aigua present a la xarxa. Després es descriu l'ús de les dades estadístiques a l'abast successivament per al cas d'un interval temporal i una conca fluvial, diversos intervals i una sola conca i finalment per al cas de diverses conques.

On the optimization of hydroelectric power generation with random water inflows.

Keywords: Stochastic Optimization, Multicommodity Network Flows, Hydroelectric Resources.

–Article rebut el gener de 1991.

I. PLANTEIG

1. INTRODUCCIÓ

El nostre objecte d'estudi és el problema de l'optimització a llarg termini de la producció hidroelèctrica en un sistema hidrogràfic d'embassaments, que anomenem també *Problema de la Coordinació Hidrotèrmica a llarg termini.* Amb això ens referim a la recerca d'una adequada política de gestió dels recursos hidràulics disponibles per tal de satisfer la demanda d'energia, tot coordinant-la amb la generació d'energia tèrmica i minimitzant les despeses de producció.

Donat que un sistema hidrogràfic té físicament l'estructura topològica de xarxa, amb els embassaments actuant com a nodes i els canals per on circula l'aigua com a arcs, el problema cau de manera natural entre els anomenats de *Fluxos sobre Xarxes,* pels quals hom disposa d'eficients especialitzacions de l'algorisme del símplex.

La dificultat principal d'aquest problema, lligada directamente amb el fet que es pretengui obtenir una política de gestió a llarg termini, és a dir, cobrint un llarg període de temps, és la incertesa amb què es coneixen els recursos disponibles en el moment de fer els càlculs. En aquest sentit, ens trobem davant d'un problema estocàstic. El procediment general per tractar problemes d'optimització estocàstica és la construcció d'un problema determinista "associat", la resolució del qual sigui factible, i tal que els resultats es puguin reinterpretar de nou en termes de l'estocasticitat original. Dins d'aquest marc general, i degut a la varietat de plantejaments estocàstics possibles, no existeix una teoria que els englobi, sino sols una col·lecció casuística de tècniques ad hoc. Stancu-Minasian [7], per exemple, dóna una visió general dels plantejaments i tècniques més habituals.

La intenció d'aquest article és estudiar la construcció determinista introduïda per Nabona [5] per tractar el problema esmentat. Estem exclusivament interessats en descriure el pas del problema estocàstic al determinista, i provar la seva correcció mitjançant el càlcul de probabilitats rigorós. No entrarem en la discussió de les tècniques concretes de resolució del problema associat ni del model de variables i funció objectiu adoptat per representar la realitat (vegi's Nabona [5] i [6]). La major part dels càlculs i detalls que aquí no figuren han estat publicats en el report tècnic Alabert [2].

2. TOPOLOGIA DE LA XARXA

Determinarem primer de tot l'estructura de la xarxa d'embassaments que hom suposa s'adapta a la situació real.

A cada embassament, s'assumeix que el volum d'aigua present pot ser subdividit de manera arbitrària en cinc parts a cadascuna de les quals li és aplicada una de les següents operacions:

a) *Generació*: L'aigua es turbinada, generant energia elèctrica, després de què viatja aigues avall fins un altre embassament o bé es perd definitivament si no n'hi ha més.

b) *Bombament*: L'aigua consumeix energia excedent per recuperar altura fins un embassament situat aigues amunt.

c) *Transvasament*: L'aigua és transportada d'un embassament a un altre. Se suposa que aquesta operació no consumeix ni genera energia.

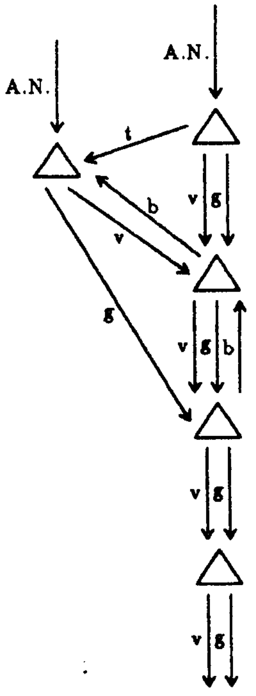
d) *Vessament*: Aigua sobrant d'un embassament massa ple pot ser vessada aigues avall sense produir ni consumir energia.

e) *Emmagatzematge*: Operació nu·la. L'aigua roman a l'embassament en què es troba.

Cal exceptuar, però, l'operació de vessament, que requereix un nivell d'aigua per sobre d'un cert mínim.

A cada operació no nul·la li associarem un *tipus* d'arc. Aquests arcs es corresponen als canals físics (naturals o artificials) que condueixen l'aigua. Segons l'operació associada, els anomenarem *arcs de generació, arcs de bombament, arcs de transvasament* i *arcs de vessament*. Afegim als anteriors els *arcs d'aportació natural,* representant els canals de recollida d'aigua en els embassaments que en disposin. A la figura de la pàgina següent, mostrem una típica xarxa amb els arcs etiquetats segons el seu tipus.

En el dibuix, tots els embassaments estan interconnectats, però si dos embassaments pertanyen a conques hidrogràfiques diferents no els unirà cap camí d'arcs, resultant doncs que la xarxa se subdivideix de manera natural en diferents parts inconnexes entre sí.



Procedim ara a incorporar la component temporal del problema. Típicament, l'optimització a llarg termini es refereix a la recerca d'una gestió optimal dels recursos durant un cert nombre d'intervals de temps suficientment extensos perquè l'aigua pugui viatjar d'un punt a un altre de la xarxa en un temps sensiblement menor. D'aquesta manera, la mateixa aigua amb què es fa una determinada operació en un embassament pot ser reutilitzada en un altre embassament dins el mateix interval temporal. Com a excepció, considerarem que l'aigua sotmesa a bombament no es reutilitza dins el mateix interval. Es tracta d'una imposició natural, atès que l'energia consumida per bombar sempre serà superior a la obtinguda per nova turbinació de la mateixa aigua.

L'evolució del temps es modela mitjançant la replicació de la xarxa tantes vegades com intervals tingui el període total d'estudi. Diferents rèpliques consecutives queden connectades pels arcs de bombament (s'evita així la reutilització de l'aigua) i per arcs d'un nou tipus que representarà la operació nul·la i que anomenarem *arcs de emmagatzematge,* sense existència física. Hem d'afegir també, per a cada embassament, un arc amb destí el node que representa l'embassament en el primer interval, i que és l'encarregat d'introduir el volum inicial que conté al principi del període, i un arc amb origen el node de l'embassament a l'últim interval, representant el volum que hi roman al final del període. Seran els *arcs de volum inicial* i els *arc de volum final* respectivament.

La xarxa replicada temporalment és l'objecte amb què treballarem. En tot el que segueix parlarem de la xarxa referint-nos a la xarxa replicada, llevat que s'especifiqui el contrari. Establim, per comoditat d'exposició, les següents definicions addicionals relatives a elements de la xarxa:

Direm que un node és un *punt d'aportació* si és destí d'un arc d'aportació natural. Anomenarem *volum d'aigua present en un arc* al que circula per l'arc en qüestió. En general, parlarem de *volum d'aigua present en un punt* de la xarxa. Un arc que tingui per origen un node pertanyent a la rèplica i–èsima de la xarxa original direm que és un arc *adscrit a l'interval i–èsim.* Finalment, quan la xarxa es composi d'arcs pertanyents a diverses conques hidrogràfiques, parlarem de les diferents *conques* o *components connexes* de la xarxa. Notarem per $\mathcal{A}$ el conjunt de tots els arcs.

3. LA ESTOCASTICITAT

En un problema del tipus Fluxos sobre Xarxes determinista, els fluxos externs que alimenten la xarxa són nombres reals coneguts, que s'utilitzen com a dades de l'algorisme optimitzador formant part del conjunt de constriccions. En el nostre cas, podem suposar que són conegudes les quantitats circulant pels arcs de volum inicial (són les actuals en el moment de realitzar l'estudi) però no els fluxos dels arcs d'aportació natural, que pertanyen al futur.

Suposarem que, com a informació de què passarà en el futur, es disposa de les lleis de probabilitat que seguiran les aportacions naturals. És a dir, les aportacions naturals seran variables aleàtories, i això és el que confereix el caràcter d'estocàstic al problema. De fet, com veurem a l'apartat 5, hi ha d'altres components aleatòries, però que no ofereixen cap dificultat.

L'aleatorietat de les aportacions naturals es transporta a tots els demés fluxos de la xarxa, degut a que òbviament són funcions de les primeres, a través de les constriccions d'equilibri de nodes. Per tal de tractar l'aleatorietat dels fluxos, Nabona associà al problema de fluxos monoarticle estocàstics sobre xarxes un problema de fluxos multiarticle deterministes. A l'apartat 4 examinarem el mecanisme d'aquesta tranferència.

Cal admetre que la llei de probabilitat de cap esdeveniment aleatori pot ser mai coneguda amb certesa i, de vegades, quan l'experiment és irrepetible, tampoc pot ser coneguda amb l'aproximació que es desitjaria. Hem de conformar-nos amb la informació que es pugui deduir de dades estadístiques obtingudes de experiències anteriors. En aquest sentit, i tenint en compte que el règim pluviomètric segueix un marcat cicle anual, és natural considerar com a experiències anteriors les aportacions naturals que per a cada interval del període d'estudi i cada punt d'aportació ens donen els registres històrics. Suposarem doncs que els intervals temporals són fraccions d'any (mesos o setmanes, per exemple) i que per a cadascun dels intervals i cada punt d'aportació hom disposa del volum d'aigua arribada durant l'interval en qüestió al llarg d'un cert nombre d'anys.

La utilització més simple d'aquests registres històrics passa per oblidar l'ordre en què han estat obtinguts, és a dir, per no prendre en consideració l'any corresponent a cada volum registrat. Usarem aquesta estratègia, que implícitament suposa la independència de les aportacions entre anys. També és possible un tractament estadístic més sofisticat que tingui en compte l'ordre natural de les dades i permeti així investigar i fer ús d'eventuals tendències temporals.

Tornant als fluxos externs de la xarxa, assenyalem finalment que els arcs de volum inicial no intervindran en l'estudi de l'estocasticitat i hom pot suposar, per simplificar, que transporten un volum d'aigua zero. Pel que fa als arcs de volum final, les quantitats transportades pels quals cal imposar arbitràriament, és indiferent que aquestes quantitats siguin nombres reals o lleis de probabilitat. Podem suposar també que són zero. La resta de fluxos externs (l'aigua que es perd aigues avall després d'un embassament final) venen determinats per les constriccions d'equilibri de nodes.

4. FLUXOS MULTIARTICLE

Com ja hem esmentat, la tècnica particular que volem investigar és la transformació del problema estocàstic de fluxos monoarticle en un problema determinista de fluxos multiarticle. El problema multiarticle, descrit per exemple en Kennington-Helgason [4], es tracta algorísmicament mitjançant la multiplicació dels arcs originals, de forma que hi hagi un arc per cada article, afegint-hi a més constriccions addicionals de "capacitat mútua", per evitar que el canal físic que representen ultrapassi la seva limitació natural. No obstant, per a la discussió teòrica que seguirà, és més còmode pensar en un sol arc pel qual viatgen junts tots els articles. Les úniques constriccions que serà necessari tenir en ment són les de no negativitat per a tots els fluxos interns de la xarxa.

El que cal doncs és convertir l'únic article que en realitat es mou per la xarxa, que és l'aigua, en diversos articles, ficticis, que es poden pensar com a aigües en diferents classes. El nombre d'articles, que notarem per k, és arbitrari. El procediment és el que descrivim tot seguit.

Suposem per un moment que coneixem la vertadera llei de probabilitat seguida per la variable aleàtoria d'aportació natural en un punt d'aportació.

Òbviament, es tracta de una variable aleatòria $\mathbf{X}$ acotada (inferiorment per zero, superiorment per una certa quantitat no sobrepassable, determinada per la capacitat física dels canals que recullen l'aigua). Això significa que la llei de $\mathbf{X}$ té suport compacte, i en tal situació es poden definir les *quantiles* q_α d'ordre $\alpha \in [0,1]$:

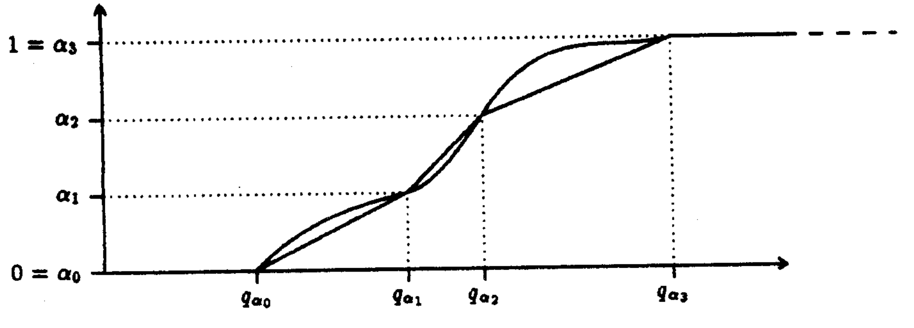
$$q_\alpha = \begin{cases} \min\{z : F(z) \geq \alpha\}, & \text{si } \alpha \in]0,1] \\ \sup\{z : F(z) = 0\}, & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

on F representa la funció de distribució de la llei de $\mathbf{X}$. Clarament, podem suposar que F és contínua.

Considerem una partició de k elements $\Pi_k = \{0 = \alpha_0 < \cdots < \alpha_{k-1} = 1\}$ de l'interval [0,1], i les quantiles associades $\{q_{\alpha_0}, \ldots, q_{\alpha_{k-1}}\}$. La funció $\overline{F}_k$ definida per

$$\overline{F}_k(z) = \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{q_{\alpha_{i+1}} - q_{\alpha_i}} (z - q_{\alpha_i}) + \alpha_i \right) \cdot 1_{[q_{\alpha_i}, q_{\alpha_{i+1}}[}(z) + 1_{[q_{\alpha_{k-1}}, \infty[}(z),$$

on $1_I(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in I \\ 0 & \text{si } z \notin I \end{cases}$ és la *funció indicador* del conjunt $\mathbf{I}$, compleix llavors les propietats que caracteritzen les funcions de distribució i és contínua i lineal a trossos. F i $\overline{F}_k$ comparteixen les mateixes quantiles d'ordres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$. Posant, per fixar idees, $k = 4$, i dibuixant èn una mateixa gràfica F i $\overline{F}_k$ obtindrem la figura



Si notem $|\Pi_k| = \max_{1\le i\le k-1} \alpha_i - \alpha_{i-1}$, i $\{\Pi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és una successió de particions de [0,1] tals que $\lim_{k\to\infty} |\Pi_k| = 0$, amb $\overline{F}_k$ la funció lineal a trossos que acabem d'introduir relativa a la partició Π_k, es evident que $\overline{F}_k(z) \xrightarrow[k\to\infty]{} F(z)$ uniformement. (Altrament dit, les lleis associades a cada $\overline{F}_k$ convergeixen a la llei associada a F en el sentit de la convergència feble de probabilitats). En aquest sentit, $\overline{F}_k$ és una aproximació de F.

En el nostre cas, les lleis de les aportacions naturals no són conegudes i tota la informació de què disposem ve donada per una mostra d'un cert tamany. Farem aleshores la construcció de $\overline{F}$ a partir de les ***quantiles empíriques*** proporcionades per la mostra:

Si $\hat{X} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ és una mostra de tamany n de la variable X, la *llei empírica* associada a $\hat{X}$ té per funció de distribució

$$F_{\hat{X}}(z) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot 1_{[\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1}[}(z) + 1_{[\hat{x}_n,\infty[}(z).$$

Les quantiles empíriques de $\hat{X}$ són les quantiles de $F_{\hat{X}}$. O sigui, $\hat{q}_\alpha = \hat{x}_{-\lfloor -\alpha n\rfloor}$, ($\alpha \in]0,1]$), on $\lfloor\cdot\rfloor$ denota part entera.

El Teorema de Glivenko-Cantelli afirma que $F_{\hat{X}}(z)$ convergeix a $F(z)$ uniformement al crèixer el tamany de la mostra. Per altra banda, és conegut també que en la mateixa situació les quantiles empíriques convergeixen a les vertaderes. D'aquests dos fets es dedueix fàcilment que la funció $\overline{F}_{k,n}$ obtinguda a partir de la llei empírica amb tamany mostral n convergeix (uniformement) al crèixer n a la $\overline{F}_k$ que s'obté a partir de la llei real de $\mathbf{X}$.

Cal remarcar que l'ús de les quantiles empíriques no és taxatiu. De fet, el que ens interessa de la llei empírica són les seves propietats de convergència al crèixer la mostra, i per tant una altra llei amb les mateixes propietats ens pot servir igual. Per exemple, hom pot substituir els "graons" constants de la funció de distribució empírica per interpolacions lineals entre els valors mostrals; això és, hom pot definir

$$F_{\hat{X}}(z) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1/n}{\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i}(z - \hat{x}_i) + \frac{i}{n} \right) \cdot 1_{[\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1}[}(z) + 1_{[\hat{x}_n,\infty[}(z).$$

És fàcil demostrar la convergència uniforme d'aquesta $F_{\hat{X}}$ a F amb l'ajuda de la convergència de la funció de distribució empírica.

El que volem es treballar amb la funció $\overline{F}_{k,n}$ (per certs k i n fixats) com si es tractés de la funció de distribució de la variable d'aportació natural. Acabem de deduir que $\overline{F}_{k,n}$ aproxima F en el sentit que

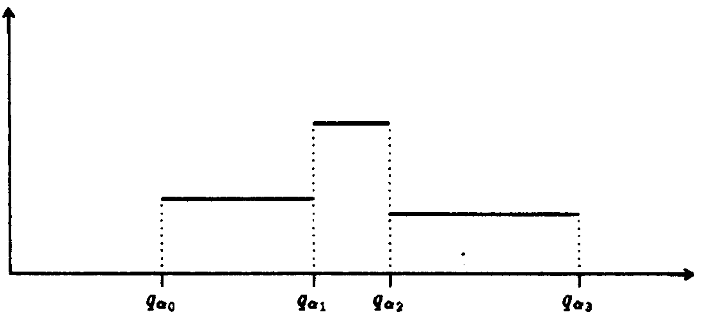
$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\overline{F}_{k,n}(z)=F(z),$$

però per tal de tenir un resultat pràctic d'aproximació cal saber què passa quan k i n creixen conjuntament. En general no es té l'anterior convergència llevat que k i n guardin una certa relació. Vegi's Alabert [1], teoremes 2.4, 2.5 i proposició 3.1 per a un resultat precís en aquest sentit.

Noti's que la funció de distribució $\overline{F}$ té densitat, donada per

$$f(x)=\sum_{i=0}^{k-2}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{q_{\alpha_{i+1}}-q_{\alpha_i}}\cdot 1_{[q_{\alpha_i},q_{\alpha_{i+1}}[}(z),$$

amb gràfica, cas $k=4$,



Les àrees dels rectangles són precisament $\alpha_1-\alpha_0,\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_2$. Anomenarem *rectangulars* a les lleis que tenen aquest tipus de densitat. Per simplificar la discussió i les notacions utilitzarem, gairebé sempre d'ara endavant, el valor $k=4$. Tot s'estén sense dificultat a k arbitrari.

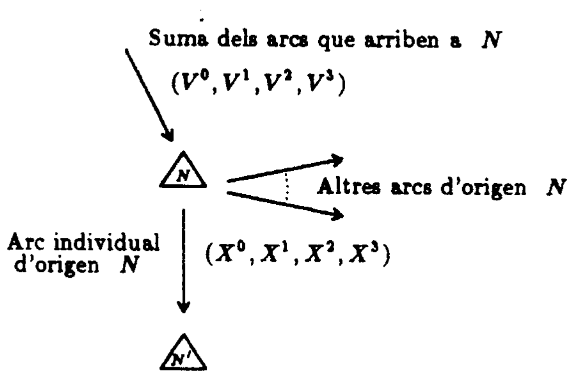
Fixats els ordres $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, tota distribució rectangular es pot descriure mitjançant la quaterna de nombres $(q_{\alpha_0},q_{\alpha_1},q_{\alpha_2},q_{\alpha_3})$, o equivalentment la quaterna $(q_{\alpha_0},q_{\alpha_1}-q_{\alpha_0},q_{\alpha_2}-q_{\alpha_1},q_{\alpha_3}-q_{\alpha_2})$, que escriurem (X^0,X^1,X^2,X^3). Anomenarem *llei rectangular de paràmetre* (X^0,X^1,X^2,X^3) a la llei rectangular que té per quantiles d'ordres $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ els $q_{\alpha_0},q_{\alpha_1},q_{\alpha_2},q_{\alpha_3}$ anteriors.

El modelatge del problema per fluxos multiarticle consisteix en utilitzar els nombres X^0,X^1,X^2,X^3 com les quantitats presents de quatre articles diferents

0,1,2,3 que circulen a través de la xarxa. Això vol dir que la presència de quantitats X^0, X^1, X^2, X^3 dels articles en un punt de la xarxa cal interpretar-la com el fet que l'aigua present en el punt esmentat és una variable aleatòria seguint una llei rectangular de paràmetre (X^0, X^1, X^2, X^3). El conjunt dels fluxos dels quatre articles per tots i cadascun dels arcs que conformen la xarxa replicada, respectant totes les constriccions, constituirian un punt factible per al mètode del simplex que caldrà anar millorant en base a una determinada funció objectiu. Anomenarem *política* a cadascun d'aquests punts factibles. La política, al mateix temps, ha de determinar d'alguna forma què cal fer amb l'aigua que serà realment present en cada punt de la xarxa si finalment s'adopta com a òptima. Per tant, cal establir una funció, determinada per la política, que assigni a cada quantitat possible d'aigua present en un node què cal fer amb ella. Procedim seguidament a definir aquesta funció.

Fixat un node N, sigui (V^0, V^1, V^2, V^3) la quaterna resultant de tots els arcs que tenen per destí el node N, això és, la suma component a component de les quaternes corresponents als arcs individuals que conflueixen en N.

Sigui (X^0, X^1, X^2, X^3) la quaterna corresponent a un arc que té per origen el node N i sigui N' el seu node destí. Gràficament



Finalment, sigui **V** el volum total d'aigua realment present en el node N. En aquesta situació, el volum d'aigua **X** que en realitat viatjarà per l'arc $\overrightarrow{NN'}$ s'obtindrà mitjançant la fórmula

$$
\mathbf{X} = \begin{cases} X^0 + \dfrac{X^1}{V^1}(\mathbf{V} - V^0), & \text{si } V^0 \leq \mathbf{V} \leq V^0 + V^1 \\ X^0 + X^1 + \dfrac{X^2}{V^2}(\mathbf{V} - (V^0 + V^1)), & \text{si } V^0 + V^1 \leq \mathbf{V} \leq \\ & \quad V^0 + V^1 + V^2 \\ X^0 + X^1 + X^2 + \dfrac{X^3}{V^3}(\mathbf{V} - (V^0 + V^1 + V^2)), & \text{si } V^0 + V^1 + V^2 \leq \mathbf{V} \leq \\ & \quad V^0 + V^1 + V^2 + V^3 \end{cases}
$$

$\mathbf{V}$ serà sempre una variable aleatòria. La fórmula anterior ens descriu una funció $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $\mathbf{X} = h(\mathbf{V})$. Per tant $\mathbf{X}$ és una variable aleatòria els valors de la qual queden determinats pels valors de $\mathbf{V}$. Direm, abreujadament, que $\mathbf{X}$ *depèn totalment* de $\mathbf{V}$.

Noti's també que h és una funció determinada per $X^0, X^1, X^2, X^3, V^0, V^1, V^2, V^3$, és a dir determinada per la política en curs d'estudi, i la correspondència és biunívoca. Tenim així, resumint, tres interpretacions pel conjunt de quaternes $\{(X^0, X^1, X^2, X^3)_A, A \in \mathcal{A}\}$, que són:

1) Per a cada $A \in \mathcal{A}$, $(X^0, X^1, X^2, X^3)_A$ identifica la llei de probabilitat que segueix la variable que ens diu l'aigua present a l'arc A.

2) La política, en el sentit de punt factible del mètode del simplex.

3) La política com a funció que assigna al volum actual en cada node què cal fer amb ell.

5. LA FUNCIÓ OBJECTIU

La funció objectiu d'un problema d'optimització determinista assigna un nombre real a cadascun dels possibles valors presos per les variables de les quals depèn. En el cas dels fluxos sobre xarxes aquests valors són quantitats o volums d'un cert objecte que circula pels arcs de la xarxa. Particularitzant a sistemes d'embassaments, l'objecte en qüestió és aigua que, al viatjar per arcs de generació o bombament, provoca un guany o una despesa d'energia elèctrica. La quantitat total d'energia obtinguda en cada interval temporal i serà la suma de les generacions individuals d'arcs adscrits a i, essent per tant una funció $G_i(\vec{x})$, si notem per $\vec{x}$ el vector de fluxos circulant pel conjunt dels arcs $\mathcal{A}$. Si $\#\mathcal{A}$ és el cardinal de $\mathcal{A}$, es té $\vec{x} \in \mathbf{R}^{\#\mathcal{A}}$.

Seguint les idees de Balleriaux-Jamoulle-Linard de Guertechin [3], l'energia hidràulica obtinguda determina un cost de generació de l'energia tèrmica complementària per satisfer el total de la demanda. El cost associat a l'interval serà una funció $C_i(G_i)$, i el cost global del període d'estudi serà la suma d'aquests costos per interval. Si I és el nombre d'intervals temporals, tenim doncs una funció objectiu f a minimitzar de la forma

$$f(\vec{x}) = C\left(G_1(\vec{x}), \ldots, G_I(\vec{x})\right) = \sum_{i=1}^{I} C_i\left(G_i(\vec{x})\right)$$

Aquesta funció objectiu, en principi determinista, pot esdevenir aleatòria per diversos motius.

En primer lloc, sabem que els fluxos $\vec{x}$ són variables aleatòries que a més depenen de la política P. Per a un cert espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, i tenint en compte que la política és un vector de dimensió $4 \times \#\mathcal{A}$, $\vec{x}$ serà una funció mesurable

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4)^{\#\mathcal{A}} \times \Omega & \xrightarrow{\quad \vec{x} \quad} & \mathbb{R}^{\#\mathcal{A}} \\ (P, \omega) & \longrightarrow & \vec{x}(P,\omega) = (x_1(P,\omega), \ldots, x_{\#\mathcal{A}}(P,\omega)) \end{array}$$

que ens converteix la funció objectiu f en aleatòria:

$$f\left(\vec{x}(P,\omega)\right) = C\left(G_1(\vec{x}(P,\omega)), \ldots, G_I(\vec{x}(P,\omega))\right)$$

En segon lloc, la funció C pot estar sotmesa a fluctuacions del mercat i esdevenir en sí aleatòria. Obtenim l'expressió

$$f\left(\vec{x}(P,\omega), \omega\right) = C\left(G_1(\vec{x}(P,\omega)), \ldots, G_I(\vec{x}(P,\omega)), \omega\right).$$

De fet les funcions G_i són també, en rigor, aleatòries, degut a eventuals pèrdues de rendiment de la maquinària. Però la probabilitat que una màquina de generació hidroelèctrica no treballi correctament és petita i optimitzant a llarg termini aquesta eventualitat queda contemplada en un coeficient de rendiment, que depèn principalment de la configuració física de l'estació generadora. Suposarem que aquest coeficient és part integrant de la funció G_i.

$f\left(\vec{x}(P,\omega), \omega\right)$ no es pot utilitzar directament com a funció objectiu degut a la presència del paràmetre aleatori ω. És forçós eliminar aquest paràmetre mitjançant l'actuació d'un funcional que assigni a la variable aleatòria

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f(\vec{x}(P,\cdot),\cdot)} & \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & f(\vec{x}(P,\omega),\omega) \end{array}$$

un nombre real prou representatiu. El candidat privilegiat (però no l'únic possible) és l'operador esperança.

Prenent esperança, $E[f(\vec{x}(P,\omega),\omega)] = \int_{\Omega} f(\vec{x}(P,\omega),\omega)\, p(d\omega)$, el paràmetre ω desapareix i ens queda una funció que depèn només de la política. Com hem vist a l'apartat anterior, la política és precisament el vector de fluxos que circulen per la xarxa en el problema multiarticle substituint l'aigua real, desconeguda a priori. Això completa la construcció del problema d'optimització determinista associat a l'aleatori original.

Per tal de calcular l'anterior integral, és natural suposar que les aleatoritzacions degudes a aportacions naturals i cost són independents. Podem aleshores pensar que $\vec{x}(P,\cdot)$ i $C(\vec{G},\cdot)$ són variables aleatòries definides sobre dos conjunts diferents Ω_1, Ω_2, dotats de probabilitats p_1, p_2 respectivament, i $f(\vec{x}(P,\cdot),\cdot)$ està definida en el conjunt $\Omega_1 \times \Omega_2$ provist de la probabilitat producte $p = p_1 \otimes p_2$.

Això vol dir que $f(\vec{x}(P,\omega),\omega)$ es pot posar com $f(\vec{x}(P,\omega_1),\omega_2)$ i que, aplicant Fubini,

$$\begin{aligned} E[f(\vec{x}(P,\omega_1),\omega_2)] &= \int_{\Omega} f(\vec{x}(P,\omega_1),\omega_2)\, p(d(\omega_1,\omega_2)) \\ &= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} C(G_1(\vec{x}(P,\omega_1)),\ldots,G_I(\vec{x}(P,\omega_1)),\omega_2)\, p_2(d\omega_2)p_1(d\omega_1). \end{aligned}$$

El resultat de la primera integral és una funció $\overline{C}(G_1(\vec{x}(P,\omega_1)),\ldots,G_I(\vec{x}(P,\omega_1))) = (\overline{C}\circ\vec{G})(\vec{x}(P,\omega_1)) = (\overline{C}\circ\vec{G}\circ\vec{x})(P,\omega_1)$ (funció mitjana de cost), que ja no depèn del paràmetre aleatòri ω_2. Integrant després sobre Ω_1 s'obté una funció determinista $\overline{\overline{C}\circ\vec{G}\circ\vec{x}}(P)$, que reescriurem per simplificar $\overline{f}(P)$.

6. EXEMPLE

Siguin, com fins ara, G_i la generació corresponent a l'interval temporal i, i $C_i(G_i,\omega_2)$ la funció de cost en aquest interval. Suposem que cada C_i està modelada com una funció polinòmica de G_i a coeficients aleatoris. El cost total del període serà

$$\begin{aligned} C(G,\omega_2) &= \sum_{i=1}^{I} C_i(G_i,\omega_2) = \sum_{i=1}^{I}\left(c_i^0(\omega_2) + c_i^1(\omega_2)\cdot G_i + c_i^2(\omega_2)\cdot G_i^2 + \right. \\ &+ \left. \cdots + c_i^n(\omega_2)\cdot G_i^n\right). \end{aligned}$$

Integrant respecte ω_2, s'obté

$$\overline{C}(G) = \sum_{i=1}^{I} (a_i^0 + a_i^1 \cdot G_i + a_i^2 \cdot G_i^2 + \cdots + a_i^n \cdot G_i^n)$$

$$\text{essent } a_i^m = \int_{\Omega_2} c_i^m(\omega_2) p_2(d\omega_2), \quad m = 0, \ldots, n.$$

I per tant,

$$\overline{f}(P) = \int_{\Omega_1} \left(\overline{C} \circ \vec{G} \circ \vec{x}\right)(P, \omega_1) p_1(d\omega_1)$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \left(a_i^0 + a_i^1 \int_{\Omega_1} G_i(\vec{x}(P,\omega_1)) p_1(d\omega_1) + a_i^2 \int_{\Omega_1} \left[G_i(\vec{x}(P,\omega_1))\right]^2 p_1(d\omega_1) + \right.$$

$$\left. + \cdots + a_i^n \int_{\Omega_1} \left[G_i(\vec{x}(P,\omega_1))\right]^n p_1(d\omega_1) \right).$$

Notem per K el nombre d'arcs adscrits a cada interval. Es té $G_i = \sum_{k=1}^{K} g_i^k$, on $g_i^k(\vec{x}(P,\omega_1))$ és la generació (positiva, negativa o nul·la) del k-èsim arc de l'interval i.

Sigui $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \in \mathbb{N}^K$ un multiíndex i notem, com és habitual, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_K$.

Aleshores, per a cada $m = 0, \ldots, n$,

$$\int_{\Omega_1} \left[G_i(\vec{x}(P,\omega_1))\right]^m p_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_1} \left[\sum_{k=1}^{K} g_i^k(\vec{x}(P,\omega_1))\right]^m p_1(d\omega_1)$$

$$= \int_{\Omega_1} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_K!} \left[g_i^1(\vec{x}(P,\omega_1))\right]^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \left[g_i^K(\vec{x}(P,\omega_1))\right]^{\alpha_K} p_1(d\omega_1)$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_K!} \int_{\Omega_1} \prod_{k=1}^{K} \left[g_i^k(\vec{x}(P,\omega_1))\right]^{\alpha_k} p_1(d\omega_1).$$

El comportament de la integral amb el producte depèn de la dependència estocàstica dels factors que hi intervenen. Posposem el càlcul fins al final de la secció IV, després de l'estudi del cas de diverses conques. Conseqüència del que hem fet fins aquí és que la component que podriem anomenar no-natural del problema, la que prové de les despeses d'explotació, és calculable independentment i produeix unes constants que s'obtenen a priori d'una vegada per totes.

La part que depèn de la política, per contra, haurà de ser computada cada cop que es necessiti una avaluació de $\overline{f}(P)$, és a dir, a cada iteració de l'algorisme optimitzador. Per últim, resta fer la observació òbvia que els nombres a_i^0 no juguen cap paper en la determinació de la política òptima, i per tant es pot suposar simplement que són zero.

II. UN INTERVAL I UNA SOLA CONCA

Acabem de definir el problema determinista que associem a l'aleatori vertader. El punt clau d'aquesta associació és la interpretació dels volums X^0, X^1, X^2, X^3 dels articles presents en cada punt de la xarxa com la llei de probabilitat (rectangular de paràmetre (X^0, X^1, X^2, X^3)) que segueix la variable aleatòria $X(\omega)$ que té per valors l'aigua real en el punt i depèn del paràmetre aleatori ω (el ω_1 del final de la secció anterior). Sabem, per construcció, que això és així per a les variables d'aportació natural. Cal demostrar que és cert per a totes les variables de la xarxa.

Direm que un arc és *coherent,* o que la variable aleatòria que representa l'aigua que hi circula és *coherent,* quan aquesta variable aleatòria segueixi una llei rectangular de paràmetre (X^0, X^1, X^2, X^3), essent X^0, X^1, X^2, X^3 els volums dels articles que la política dicta per l'arc en qüestió. L'objectiu d'aquesta secció és provar la coherència de tots els arcs de la xarxa sense replicar; és a dir, quan només hi ha un interval temporal. Suposarem, a més, que la xarxa consta de una sola conca.

Donat que el problema de fluxos multiarticle sobre xarxes té les seves pròpies regles operacionals, cal comprovar que l'aplicació d'aquestes regles no distorsiona la interpretació dels volums dels articles com a paràmetres de la llei del volum d'aigua real. Per exemple: Si a un node de la xarxa concorren dos arcs amb les quantitats X^0, X^1, X^2, X^3 i Y^0, Y^1, Y^2, Y^3, les quantitats totals que el node reparteix entre els arcs que el tenen per origen seran $X^0 + Y^0, X^1 + Y^1, X^2 + Y^2, X^3 + Y^3$. Però la suma de dues variables de lleis rectangulars no té en general llei rectangular.

1. LA HIPÒTESI FONAMENTAL

Cal forçar d'alguna manera la relació correcta entre les operacions amb articles i les operacions amb variables aleatòries. A grans trets, el que ens interessa és que les variables involucrades depenguin totalment entre sí.

Començarem retornant a les variables **V** i **X** definides a la secció I. La funció $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que dóna la dependència entre **V** i **X**,

$$h(v) = \begin{cases} X^0 + \dfrac{X^1}{V^1}(v - V^0) & \text{si } V^0 \leq v \leq V^0 + V^1 \\ X^0 + X^1 + \dfrac{X^2}{V^2}(v - (V^0 + V^1)) & \text{si } V^0 + V^1 \leq v \leq \\ & \quad V^0 + V^1 + V^2 \\ X^0 + X^1 + X^2 + \dfrac{X^3}{V^3}(v - (V^0 + V^1 + V^2)) & \text{si } V^0 + V^1 + V^2 \leq v \leq \\ & \quad V^0 + V^1 + V^2 + V^3 \end{cases}$$

amb $0 \leq X^i \leq V^i$, $i = 0, 1, 2, 3$,

l'anomenarem *funció d'extracció,* i ens referirem a l'operació d'obtenir **X** a partir de **V** com la *operació d'extracció* mitjançant h. Direm també que **X** és extracció de **V** i que h és la funció d'extracció de X^0, X^1, X^2, X^3 a partir de V^0, V^1, V^2, V^3. Es té l'enunciat següent:

Proposició 1

L'operació d'extracció es coherent, Això és: Si **V** segueix una llei rectangular de paràmetre (V^0, V^1, V^2, V^3) i $\mathbf{X} = h(\mathbf{V})$ amb h funció d'extracció de X^0, X^1, X^2, X^3 a partir de V^0, V^1, V^2, V^3, aleshores **X** segueix una llei rectangular de paràmetre (X^0, X^1, X^2, X^3).

■

La demostració és standard. Vegi's Alabert [2] per els detalls de càlcul.

Es comproven també fàcilment els següents dos resultats més relatius a l'operació d'extracció.

Proposició 2

La composició d'extraccions és extracció. És a dir: Si **X**, **Y**, **Z** són tres variables aleatòries amb lleis rectangulars de paràmetres (X^0, X^1, X^2, X^3), (Y^0, Y^1, Y^2, Y^3), (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3) i tals que **X** és extracció de **Y** i **Y** és extracció de **Z**, aleshores **X** és extracció de **Z**.

■

Proposició 3

La suma d'extraccions és extracció: Si $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ són variables aleatòries obtingudes d'una tercera variable $\mathbf{Z}$ amb llei rectangular mitjançant operacions d'extracció, aleshores la variable $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ és extracció de $\mathbf{Z}$. A més, la llei de $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ és rectangular de paràmetre $(X^0 + Y^0, X^1 + Y^1, X^2 + Y^2, X^3 + Y^3)$.

■

La hipòtesi fonamental que permetrà establir la coherència en tot l'interval temporal és la de que tots els punts d'aportació reben una mateixa "proporció" d'aigua. Més precisament, si $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ són les variables d'aportació natural recollida en dos punts d'aportació i el valor pres per $\mathbf{X}$ és un cert x tal que $p\{\mathbf{X} \leq x\} = \alpha$, aleshores $\mathbf{Y}$ prendrà el valor y tal que $p\{\mathbf{Y} \leq y\} = \alpha$. Aquesta hipòtesis és natural degut a la proximitat geogràfica de tots els embassaments amb aportació natural en una mateixa conca. Podem formular-la d'una manera més operativa:

Proposició 4

La hipòtesi anterior és equivalent a afirmar que les variables aleatòries $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$, amb lleis rectangulars de paràmetres (X^0, X^1, X^2, X^3) i (Y^0, Y^1, Y^2, Y^3) són totalment dependents, estant la seva dependència $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X})$ expressada per la fórmula $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X}) =$

$$\begin{cases} Y^0 + \dfrac{\mathbf{X} - X^0}{X^1} Y^1, & \text{si } X^0 \leq \mathbf{X} \leq X^0 + X^1 \\ Y^0 + Y^1 + \dfrac{\mathbf{X} - (X^0 + X^1)}{X^2} Y^2, & \text{si } X^0 + X^1 \leq \mathbf{X} \leq \\ & \quad X^0 + X^1 + X^2 \\ Y^0 + Y^1 + Y^2 + \dfrac{\mathbf{X} - (X^0 + X^1 + X^2)}{X^3} Y^3, & \text{si } X^0 + X^1 + X^2 \leq \mathbf{X} \leq \\ & \quad X^0 + X^1 + X^2 + X^3 \end{cases}$$

■

Anomenarem a una funció h del tipus de l'enunciat anterior *funció de dependència rectangular*. Formalment, són funcions d'extracció, però sense el requeriment $Y^i \leq X^i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Proposició 5

Si $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ són variables aleatòries amb lleis rectangulars de paràmetres (X^0, X^1, X^2, X^3) i (Y^0, Y^1, Y^2, Y^3), totalment dependents a través de $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X})$, amb

h una funció de dependència rectangular, aleshores la variable $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ té llei rectangular de paràmetre $(X^0+Y^0, X^1+Y^1, X^2+Y^2, X^3+Y^3)$ i és tal que $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ són extraccions de $\mathbf{Z}$.

Idea de la demostració

La funció $z = x+h(x)$ és invertible en $[X^0, X^0+X^1+X^2+X^3]$. Efectivament, en $[X^0, X^0+X^1]$ és invertible amb inversa $x = \dfrac{X^1}{Y^1+X^1}z + \dfrac{X^0Y^1 - Y^0X^1}{X^1+Y^1}$, en $[X^0+X^1, X^0+X^1+X^2]$ ho és amb inversa

$$x = \frac{X^2}{Y^2+X^2}z + \frac{(X^0+X^1)Y^2 - (Y^0+Y^1)X^2}{X^2+Y^2},$$

i en $[X^0+X^1+X^2, X^0+X^1+X^2+X^3]$ amb inversa

$$x = \frac{X^3}{X^3+Y^3}z + \frac{(X^0+X^1+X^2)Y^3 - (Y^0+Y^1+Y^2)X^3}{X^3+Y^3}.$$

Per obtenir la invertibilitat global a partir d'aquesta invertibilitat a trossos és suficient observar que:

$$x \in [X^0+\cdots+X^i, X^0+\cdots+X^{i+1}] \Longrightarrow z \in [X^0+Y^0+\cdots+X^i+Y^i,$$
$$X^0+Y^0+\cdots+X^{i+1}+Y^{i+1}],\ i = 0,1,2$$

de forma que z no pot ser a la vegada imatge de dos nombres x de diferents intervals de la partició $\{X^0, X^0+X^1, X^0+X^1+X^2, X^0+X^1+X^2+X^3\}$.

Usant les anteriors expressions de $(Id+h)^{-1}(z)$ es troba fàcilment que la variable $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ segueix una llei rectangular de paràmetre $(Z^0, Z^1, Z^2, Z^3) = (X^0+Y^0, X^1+Y^1, X^2+Y^2, X^3+Y^3)$.

Per veure que $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ són extraccions de $\mathbf{Z}$ només cal arreglar les expressions de $x = (Id+h)^{-1}(z)$ i de $y = h(x) = z - x = z - (Id+h)^{-1}(z)$ per posar-les en forma de funció d'extracció.

■

El raonament anterior és generalitzable fàcilment a qualsevol nombre de variables aleatòries. És a dir:

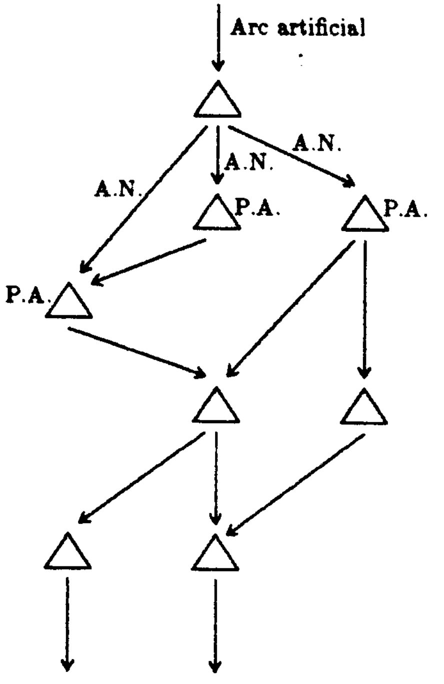
Proposició 5'

Si $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n$ són variables aleatòries amb lleis rectangulars de paràmetres $(Y_0^0, Y_0^1, Y_0^2, Y_0^3)$, $(Y_1^0, Y_1^1, Y_1^2, Y_1^3), \ldots, (Y_n^0, Y_n^1, Y_n^2, Y_n^3)$ i tals que $\mathbf{Y}_i = h_i(\mathbf{Y}_0)$, $i = 1, \ldots, n$, amb h_i funcions de dependència rectangular, aleshores la variable $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_0 + \cdots + \mathbf{Y}_n$ segueix una llei rectangular de paràmetre $(Z^0, Z^1, Z^2, Z^3) = (Y_0^0 + \cdots + Y_n^0, Y_0^1 + \cdots + Y_n^1, Y_0^2 + \cdots + Y_n^2, Y_0^3 + \cdots + Y_n^3)$ i $\mathbf{Y}_i$ és extracció de $\mathbf{Z}$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

■

2. COHERÈNCIA DE L'INTERVAL

Usarem la proposició 5' per afegir a la xarxa d'embassaments un node i un arc artificials amb el sol fi de facilitar la demostració que la política representa la llei de l'aigua present en tots els arcs pertanyents a un mateix interval temporal. Primer introduïm un node artificial que serveixi d'origen a tots els arcs d'aportació natural, que en principi no en tenien. Després, afegim l'arc artificial com un arc que té destí el node artificial i no té origen. Vegi's el dibuix:



El conjunt d'aportacions naturals ha quedat reunit en un sol arc d'aportació natural global, del qual s'obtenen les aportacions naturals de cada punt d'aportació mitjançant operacions d'extracció. D'aquesta manera, els *arcs* formen un graf dirigit amb un element que és avantpassat de tots els demés, i que anomenarem *ancestre.* Dit d'altra manera: Els arcs de la xarxa constitueixen un conjunt parcialment ordenat amb element mínim.

L'arc ancestre és coherent gràcies a l'última proposició i a la hipòtesi fonamental que les aportacions naturals en una conca depenen rectangularment entre sí. Podem doncs resumir el que hem vist fins ara en les quatre regles:

1) Extracció d'un arc coherent és coherent.

2) Extracció d'una extracció de l'ancestre és extracció de l'ancestre.

3) Suma d'extraccions de l'ancestre és extracció de l'ancestre.

4) L'ancestre és coherent.

Ara estem en posició de demostrar el que volem amb un raonament final molt simple.

Teorema 1

Fixat un interval temporal, tots els arcs adscrits a aquest interval són coherents: Si $\mathbf{X}$ és la variable aleatòria que representa l'aigua que circularà per un arc de l'interval i X^0, X^1, X^2, X^3 són les quantitats dels articles 0,1,2,3 que la política dicta per l'arc en qüestió, aleshores $\mathbf{X}$ segueix una llei rectangular de paràmetre (X^0, X^1, X^2, X^3).

Demostració

Subdividim el conjunt d'arcs de l'interval en dues classes, que anomenarem tipus I i tipus II. En un principi, etiquetem l'ancestre com a arc de tipus I i tots els demés com a arcs de tipus II. A mesura que anem demostrant que un arc de tipus II és extracció de l'ancestre el reetiquetarem com de tipus I.

Considerem el conjunt d'arcs de tipus II. Si aquest conjunt és no buit, aleshores existeix almenys un arc d'aquest conjunt tal que tots els seus pares (en pot tenir un o més d'un) són de tipus I. Això és obvi del fet que tots els arcs estan acotats inferiorment (per la relació d'ordre parcial esmentada) per un arc de tipus I (el mínim per la relació d'ordre), que és l'ancestre.

Tots els pares de l'arc en qüestió són per tant extraccions de l'ancestre o l'ancestre mateix. En el cas d'un sol pare, si aquest és l'ancestre, aleshores l'arc és extracció de l'ancestre; i si l'únic pare és extracció de l'ancestre també ell mateix esdevé extracció de l'ancestre, per aplicació de la regla 2). En ambdós casos l'arc passa a tipus I.

En el cas de diversos pares, tots ells són extracció de l'ancestre i, per 3) i 2), l'arc és extracció de l'ancestre, passant a tipus I.

Podem repetir el procediment amb el conjunt remanent d'arcs de tipus II fins que aquest conjunt esdevingui buit. Això vol dir que tots els arcs són extracció de l'ancestre o l'ancestre mateix. Per 4), l'ancestre és coherent, i aleshores 1) ens dóna la coherència de tots els arcs.

$\blacksquare$

III. DIVERSOS INTERVALS I UNA SOLA CONCA

Considerarem ara la interacció d'aigua procedent de diversos intervals, suposant, com abans, que la xarxa consta d'una sola conca.

La nostra intenció és procedir de manera similar al cas d'un sol interval, és a dir, crear un arc ancestre del qual depenguin rectangularment totes les variables de la xarxa. La dificultat és que no té sentit la hipòtesi de mateixa proporció d'aigua rebuda en tots els punts d'aportació de la xarxa replicada, doncs voldria dir que l'aportació rebuda al primer interval determina completament la que es rebrà durant tot el període d'estudi. En general, les variables aleatòries d'aportació natural a un mateix punt d'aportació en diferents intervals temporals no són totalment dependents ni tampoc independents. Ens cal forçar d'alguna manera la dependència total.

Suposem per un moment que disposem de la llei conjunta de dues variables $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$. Aquesta informació permet obtenir la *llei de* $\mathbf{Y}$ *condicionada per* $\mathbf{X} = x$, que notem $L\ell[\mathbf{Y}/\mathbf{X} = x]$, amb la qual cosa tenim una aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow Pr(\mathbb{R}) \\ x &\longrightarrow L\ell[\mathbf{Y}/\mathbf{X} = x] \end{aligned}$$

que a cada valor $x \in \mathbb{R}$ pres per la variable $\mathbf{X}$ li assigna un element del conjunt $Pr(\mathbb{R})$ de probabilitats sobre $\mathbb{R}$. Però en el nostre problema no podem fer dependre la llei de la segona variable, que ha de ser una dada per l'algorisme multiarticle, del resultat de la primera, desconegut a priori.

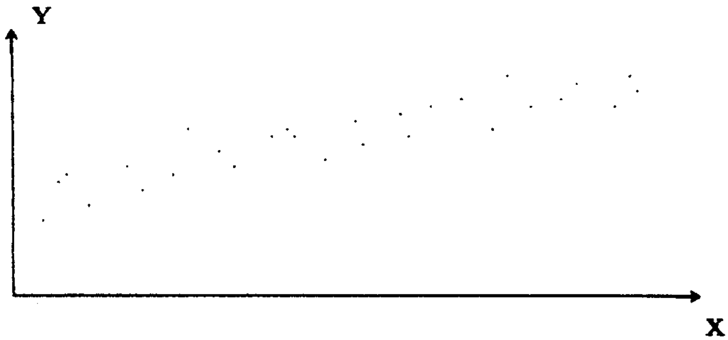
Per tal d'assignar a cada valor pres per $\mathbf{X}$ un únic nombre real, el procediment més raonable és substituir la llei de $\mathbf{Y}$ condicionada per $\mathbf{X} = x$ pel moment de primer ordre d'aquesta llei, és a dir, per *l'esperança condicionada* de $\mathbf{Y}$ sabent $\mathbf{X}(\omega) = x$. Posant $E[\mathbf{Y}/\mathbf{X} = x] = 0$ si $x \notin \mathbf{X}(\Omega)$, obtenim una nova variable, *l'esperança condicionada* de $\mathbf{Y}$ per $\mathbf{X}$,

$$E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]: \quad \begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\mathbf{X}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{E[\mathbf{Y}/\mathbf{X} = \cdot]} & \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & \mathbf{X}(\omega) = x & \longrightarrow & E[\mathbf{Y}/\mathbf{X} = x] \end{array}$$

totalment dependent de $\mathbf{X}$.

1. APROXIMACIÓ DE L'ESPERANÇA CONDICIONADA

Examinada la situació ideal en que la llei conjunta de $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ és coneguda, observem ara la nostra posició real. Tot el que coneixem de la relació entre les variables $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ (d'aportació natural en un mateix punt d'aportació en intervals temporals consecutius) queda reflectit en un núvol de punts



on cada punt (x, y) representa l'observació del vector aleatori $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ en un any determinat. Podem pensar en el núvol de punts com valors escollits d'una funció ideal $W(x)$ que aproxima $E[\mathbf{Y}/\mathbf{X} = x]$ com a funció de x.

El que ens interessa finalment és aproximar $W(x)$ per una funció $h(x)$ lineal a trossos i contínua de la forma

$$h(x) = \begin{cases} a_0 x + b_0, & \text{si } X^0 \le x \le X^0 + X^1 \\ a_1 x + b_1, & \text{si } X^0 + X^1 \le x \le X^0 + X^1 + X^2 \\ a_2 x + b_2, & \text{si } X^0 + X^1 + X^2 \le x \le X^0 + X^1 + X^2 + X^3 \\ 0, & \text{en altre cas} \end{cases}$$

amb les condicions (per tal de tenir continuïtat)

$$\begin{cases} a_0(X^0 + X^1) + b_0 = a_1(X^0 + X^1) + b_1 \\ a_1(X^0 + X^1 + X^2) + b_1 = a_2(X^0 + X^1 + X^2) + b_2 \end{cases}$$

on (X^0, X^1, X^2, X^3) és el paràmetre de la llei rectangular de $\mathbf{X}$.

Ens proposem trobar la funció h que millor aproxima W segons un cert criteri d'optimalitat, utilitzant directament les dades originals, o sigui, el núvol de punts. D'aquesta manera, malgrat la discussió teòrica que ens ha portat a fer les successives aproximacions

$$L\ell[\mathbf{Y}/\mathbf{X} = \cdot] \longrightarrow E[\mathbf{Y}/\mathbf{X} = \cdot] \longrightarrow W(\cdot) \longrightarrow h(\cdot),$$

a la pràctica farem ús de tota la informació disponible a l'hora de calcular h. Conseqüentment, no podrem assegurar que h aproxima de manera òptima (en algun sentit) la llei $L\ell[\mathbf{Y}/\mathbf{X} = \cdot]$, que no és abastable, però sí les dades estadístiques, i això és òbviament el millor que podem esperar.

Sigui n el nombre de punts del núvol i sigui $\{(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n\}$ el conjunt d'aquests punts en coordenades cartesianes. Podem pensar en $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ com punts de l'espai $\mathbf{R}^n$, el qual suposarem dotat de la norma euclidiana $\|\vec{z}\| = (\sum_{i=1}^{n} z_i^2)^{1/2}$, i per tant de la distància associada $d(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \|\vec{z}_1 - \vec{z}_2\|$. Siguin n_0, n_1, n_2 el nombre de valors x_i pertanyents als intervals $[X^0, X^0 + X^1[$, $[X^0 + X^1, X^0 + X^1 + X^2[$ i $[X^0 + X^1 + X^2, X^0 + X^1 + X^2 + X^3]$ respectivament. Aleshores $\vec{x}$ es pot escriure com $(x_1, \ldots, x_{n_0}, x'_1, \ldots, x'_{n_1}, x''_1, \ldots, x''_{n_2}) \in \mathbf{R}^{n_0} \times \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} = \mathbf{R}^n$, i anàlogament per $\vec{y}$. Considerem llavors el subspai $\mathcal{V}$ de $\mathbf{R}^n$, de dimensió 4, format pels vectors de la forma

$$(a_0 x_1 + b_0, \ldots, a_0 x_{n_0} + b_0, a_1 x'_1 + b_1, \ldots, a_1 x'_{n_1} + b_1, a_2 x''_1 + b_2, \ldots, a_2 x''_{n_2} + b_2)$$

on $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$ són escalars lligats per les relacions

$$\begin{aligned} a_0(X^0 + X^1) + b_0 &= a_1(X^0 + X^1) + b_1 \\ a_1(X^0 + X^1 + X^2) + b_1 &= a_2(X^0 + X^1 + X^2) + b_2 \end{aligned}$$

És evident que tenim quatre graus de llibertat per moure aquestes constants i que, per tant, els vectors de la forma anterior generen un espai de dimensió 4. El Teorema de la Projecció en $\mathbb{R}^n$ ens assegura que existeix un únic vector $\vec{v}_0 \in \mathcal{V}$ tal que

$$d(\vec{y}, \vec{v}_0) = \min_{v \in \mathcal{V}} d(\vec{y}, \vec{v})$$

Aquest vector és l'únic tal que $\vec{y} - \vec{v}_0$ és ortogonal al subspai $\mathcal{V}$ i representa la millor aproximació (en norma euclidiana) de $\vec{y}$ per un vector contingut en $\mathcal{V}$. Trobar $\vec{v}_0$ no és més que resoldre un problema de mínims quadrats, que no té cap dificultat.

L'elecció de $\mathcal{V}$ com a subspai aproximador i la minimització de la norma euclidiana com a criteri d'optimalitat és naturalment arbitrari. En el nostre problema hi ha altres eleccions possibles per a $\mathcal{V}$ (vegi's Alabert [2]) i també es poden usar altres normes encara que no amb la facilitat de càlcul que proporciona l'euclidiana.

Tornant a l'aproximació per elements del subspai $\mathcal{V}$ introduït abans, el millor vector $\vec{v}_0$ queda determinat per una quaterna òptima (a_0, a_1, a_2, b_0). Si posem ara $A^0 = b_0 + a_0 X^0$, $A^1 = a_0 X^1$, $A^2 = a_1 X^2$, $A^3 = a_2 X^3$, la funció h s'expressa

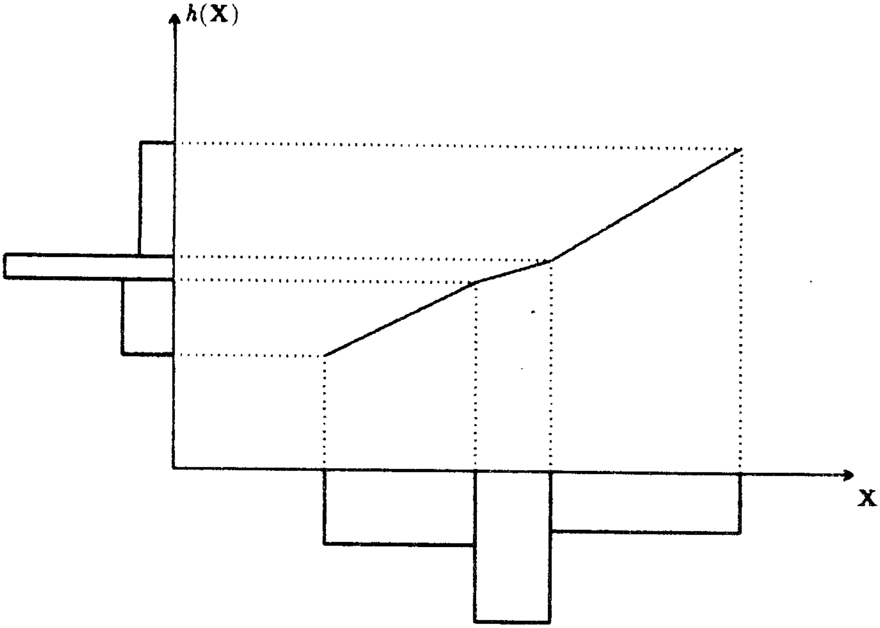
$$h(x) = \begin{cases} A^0 + \dfrac{A^1}{X^1}(x - X^0), & \text{si } X^0 \le x \le X^0 + X^1 \\ A^0 + A^1 + \dfrac{A^2}{X^2}(x - (X^0 + X^1)), & \text{si } X^0 + X^1 \le x \le \\ & \quad X^0 + X^1 + X^2 \\ A^0 + A^1 + A^2 + \dfrac{A^3}{X^3}(x - (X^0 + X^1 + X^2)), & \text{si } X^0 + X^1 + X^2 \le x \le \\ & \quad X^0 + X^1 + X^2 + X^3 \end{cases}$$

d'on resulta (secció II) que la variable aleatòria $h(\mathbf{X})$ segueix una llei rectangular de paràmetre (A^0, A^1, A^2, A^3). Podem dir que el que hem fet és una *regressió lineal a trossos.*

Ara estem en disposició de retornar a la situació de la secció anterior. Suposem que la xarxa en estudi té m punts d'aportació, essent $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ les variables d'aportació natural en el primer interval i $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_m$ les corresponents en el segon interval. La substitució de les variables originals $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_m$ per les variables aproximadores $h_1(\mathbf{X}_1), \dots, h_m(\mathbf{X}_m)$, junt amb el fet que $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ són totes dependents de, per exemple, $\mathbf{X}_1$ a través d'una funció de dependència rectangular, i que la composició de funcions d'aquest tipus és una altra funció de dependència rectangular, fa que $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$; $h_1(\mathbf{X}_1), \dots, h_m(\mathbf{X}_m)$ siguin totes dependents de $\mathbf{X}_1$. S'en dedueix l'existència de l'arc ancestre construït anteriorment, però ara repartint articles als dos primers intervals de la xarxa replicada.

2. ARTICLES NEGATIUS

Abans de concloure de l'existència de l'ancestre la cohèrencia dels arcs adscrits a tots dos intervals, cal observar que a l'apartat anterior hem deixat de banda l'eventualitat que alguns dels nombres A^0, A^1, A^2, A^3 siguin negatius. En efecte, aquest serà el cas si algun dels coeficients a_0, a_1, a_2 és negatiu. Per veure el que succeeix és útil la següent imatge gràfica de la obtenció de la funció densitat de $h(\mathbf{X})$ a partir de la de $\mathbf{X}$.



Aquesta construcció no sembla tenir sentit si h resulta no ser una funció creixent, doncs dóna lloca a una "llei" rectangular de paràmetre (A^0, A^1, A^2, A^3) amb alguna component negativa. Ens cal definir què vol dir aquesta "llei".

Siguin A^0, A^1, A^2, A^3 quatre nombres no necessariament positius. Definim la *llei rectangular de paràmetre* (A^0, A^1, A^2, A^3) com la probabilitat sobre $\mathbb{R}$ que té per funció de distribució

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{\alpha_1-\alpha_0}{|A_1|}(z-m^0)\cdot 1_{\mathrm{INT}^0}(z)+(\alpha_1-\alpha_0)\cdot 1_{[M^0,\infty[}(z)\\
&+ \frac{\alpha_2-\alpha_1}{|A_2|}(z-m^1)\cdot 1_{\mathrm{INT}^1}(z)+(\alpha_2-\alpha_1)\cdot 1_{[M^1,\infty[}(z)\\
&+ \frac{\alpha_3-\alpha_2}{|A_3|}(z-m^2)\cdot 1_{\mathrm{INT}^2}(z)+(\alpha_3-\alpha_2)\cdot 1_{[M^2,\infty[}(z)
\end{aligned}
$$

on $|\cdot|$ indica el valor absolut, $m^i=\min\{A^0+\cdots+A^i, A^0+\cdots+A^{i+1}\}$, $M^i=\max\{A^0+\cdots+A^i, A^0+\cdots+A^{i+1}\}$ i $\mathrm{INT}^i=[m^i,M^i[$.

La funció de densitat corresponent és

$$
f(z)=\frac{\alpha_1-\alpha_0}{|A_1|}\cdot 1_{\mathrm{INT}^0}(z)+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{|A_2|}\cdot 1_{\mathrm{INT}^1}(z)+\frac{(\alpha_3-\alpha_2)}{|A_3|}\cdot 1_{\mathrm{INT}^2}(z).
$$

És immediat que si A^0, A^1, A^2, A^3 són tots positius, les expressions de F i f es redueixen a les definides a la secció I. En el cas general, les expressions anteriors de F i f són combinacions lineals d'indicadors d'intervals no necessàriament disjunts. Intuïtivament, una quantitat negativa en un article vol dir que aquest torna a carregar probabilitat sobre un conjunt ja escombrat per un altre article. Noti's també que al treballar amb quantitats negatives d'articles en el paràmetre (A^0, A^1, A^2, A^3), la quantitat A^0 ja no té perquè representar el volum mínim d'aigua que s'espera, ni $A^0+A^1+A^2+A^3$ el volum màxim. L'existència d'articles negatius no modificarà substancialment les discussions de l'apartat anterior sobre coherència dels arcs, perquè queda confinada als arcs d'aportació natural. Efectivament, mantenint les restriccions de no negativitat de les variables de l'algorisme multiarticle, els articles presents en cada punt d'aportació hauran de ser forçosament positius, perquè en cas contrari hi hauria al menys un arc d'origen el punt d'aportació transportant quantitats negatives. Aquesta no negativitat de les variables obliga a que l'eventual quantitat negativa d'un cert article circulant per l'arc d'aportació natural al segon interval s'hagi de veure immediatament compensada per volums positius arribats d'arcs provinents del primer interval (emmagatzematge, bombament o trasvasament), És necessari fer la hipòtesi que aquesta compensació és possible, ja que, a priori, podria passar que a una quantitat positiva de un article a l'aportació natural del primer interval li correspongués una quantitat negativa, més gran en valor absolut, del mateix article a l'aportació natural del segon interval.

3. LA COHERÈNCIA

Tenint present tot això, podem veure fàcilment la coherència buscada. Direm que $\mathbf{Y}$ és una *extracció generalitzada* de $\mathbf{X}$ si $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X})$ amb h una funció que té la forma de les funcions d'extracció però sense imposar la condició $0 \leq Y^i \leq X^i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Direm que és una *extracció generalitzada positiva* si es compleix almenys que $0 \leq Y^i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Anomenarem, a partir d'ara, *llei rectangular positiva* a la que té totes les components del paràmetre positives, i escriurem simplement *llei rectangular* quan no és necessàriament així. Les extraccions generalitzades seran sempre de variables amb llei rectangular positiva.

Les següents proposicions són els enunciats anàlegs als de les proposicions 1, 2 i 3 amb extraccions generalitzades.

Proposició 6

L'operació d'extracció generalitzada és coherent: Si $\mathbf{X}$ segueix una llei rectangular positiva de paràmetre (X^0, X^1, X^2, X^3) i $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X})$ amb h funció d'extracció generalitzada de Y^0, Y^1, Y^2, Y^3 a partir de X^0, X^1, X^2, X^3, aleshores $\mathbf{Y}$ segueix una llei rectangular de paràmetre (Y^0, Y^1, Y^2, Y^3).

■

Proposició 7

La composició d'una extracció generalitzada positiva i una extracció és una extracció generalitzada positiva: Si $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ són tres variables aleatòries amb lleis rectangulars positives de paràmetres (X^0, X^1, X^2, X^3), (Y^0, Y^1, Y^2, Y^3), (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3) i tals que $\mathbf{X}$ és extracció de $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{Y}$ és extracció generalitzada positiva de $\mathbf{Z}$, aleshores $\mathbf{X}$ és extracció generalitzada positiva de $\mathbf{Z}$.

■

Proposició 8

La suma d'extraccions generalitzades és extracció generalitzada: Si $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ són variables aleatòries obtingudes d'una altra variable $\mathbf{Z}$ amb llei rectangular positiva mitjançant operacions d'extracció generalitzades, aleshores la variable $\mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$ és extracció generalitzada de $\mathbf{Z}$. A més, la llei de $\mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$

és rectangular de paràmetre $(X_1^0 + \cdots + X_n^0, X_1^1 + \cdots + X_n^1, X_1^2 + \cdots + X_n^2, X_1^3 + \cdots + X_n^3)$.

■

Les tres proposicions es demostren exactament igual que les seves anàlogues de l'apartat II.1. Noti's a més, en la última proposició, que si la suma component a component dels paràmetres del sumands dóna lloc a un paràmetre amb components positives, aleshores la llei de $\mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$ és rectangular positiva. Ens interessarà aplicar precisament aquest cas.

Direm que $\mathbf{Y}$ depèn de $\mathbf{X}$ mitjançant una *funció de dependència rectangular generalitzada* quan $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X})$ i h té la mateixa forma d'una funció de dependència rectangular sense imposar les condicions $0 \leq Y^i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Formalment, una funció de dependència rectangular generalitzada és igual que una funció d'extracció generalitzada. Es pot provar el següent anàleg de la Proposició 5' sobre la suma de variables amb dependència rectangular:

Proposició 9

Siguin $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$ variables aleatòries amb lleis rectangulars positives i $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_m$ variables aleatòries amb lleis rectangulars, lligades per les relacions

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= h_i(\mathbf{X}_1), \quad i = 2, \ldots, m \\ \mathbf{Y}_i &= \hat{h}_i(\mathbf{X}_i), \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

amb

h_i : Funcions de dependència rectangular.

$\hat{h}_1$: Funcions de dependència rectangular generalitzada

Aleshores, la variable $\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{Y}_i$ segueix una llei rectangular.

Si aquesta llei rectangular és positiva, aleshores cada $\mathbf{X}_i$ i cada $\mathbf{Y}_i$ és extracció generalitzada de $\mathbf{Z}$.

■

La situació expressada a l'últim enunciat és la que correspon, en el nostre problema, a les aportacions naturals dels dos primers intervals. Si m és el nombre de punts d'aportació de la xarxa (sense replicar), $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$ seran les variables d'aportació natural del primer interval i $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_m$ les del segon. Els lligams de dependència rectangular $\mathbf{X}_i = h(\mathbf{X}_1)$ són deguts a la hipòtesi d'igual proporció d'aportació (vegeu II.1) i els de dependència rectangular generalitzada $\mathbf{Y}_i = \hat{h}_i(\mathbf{X}_i)$ a la regressió lineal a trossos. L'aigua (fictícia) circulant per l'arc ancestre, construït de la mateixa manera que a l'apartat II.2, ve donada per la variable $\mathbf{Z}$, que segueix una llei rectangular de paràmetre

$$\left(\sum_{i=1}^{m} X_i^0 + Y_i^0, \sum_{i=1}^{m} X_i^1 + Y_i^1, \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + Y_i^2, \sum_{i=1}^{m} X_i^3 + Y_i^3\right).$$

Aquesta llei rectangular és a més positiva, per la hipòtesi que els volums d'articles presents en els punts d'aportació han de ser positius i el fet que les extraccions (ordinàries) dels volums $X_i^0, X_i^1, X_i^2, X_i^3$ disminueixen aquestes quantitats.

En resum, l'ancestre és coherent i segueix una llei rectangular positiva. Les aportacions naturals dels dos intervals són totes extracció generalitzada de l'ancestre. Tenim les quatre regles:

1) Extracció generalitzada d'un arc coherent és coherent.

2) Extracció d'una extracció generalitzada positiva és extracció generalitzada positiva.

3) Suma d'extraccions generalitzades és extracció generalitzada.

4) L'ancestre és coherent.

El raonament final no és gaire més complicat que en el cas d'un sol interval:

Teorema 2

Tots els arcs adscrits als dos primers intervals temporals són coherents: Si $\mathbf{X}$ és la variable aleatòria que representa l'aigua que circularà per un arc i X^0, X^1, X^2, X^3 son les quantitats (no necessàriament positives) dels articles 0,1,2,3 que la política dicta per l'arc en qüestió, aleshores $\mathbf{X}$ segueix una llei rectangular de paràmetre (X^0, X^1, X^2, X^3).

Demostració

Procedint igual que en II.2, subdividim el conjunt d'arcs en arcs de tipus I i arcs de tipus II, essent l'ancestre l'únic arc de tipus I, en principi.

Considerem el conjunt d'arcs de tipus II. Si és no buit, aleshores existeix al menys un arc d'aquest conjunt tal que tots els seus pares són de tipus I.

Si té un únic pare,

si el pare és l'ancestre,

aleshores és tracta d'un arc d'aportació natural que, com ja hem vist, és extracció generalitzada de l'ancestre, i el passem a tipus I;

si el pare no és l'ancestre,

aleshores l'arc ha de ser extracció (ordinària) del seu pare i aquest últim ha de ser extracció generalitzada positiva de l'ancestre. Si no fos positiva, l'aigua present en el seu node destí (origen de l'arc que estudiem) seguiria una llei rectangular no positiva, el què no pot ser. Aplicant la regla 2), l'arc és extracció generalitzada positiva de l'ancestre, i passa a tipus I.

Si té diversos pares,

cada pare és extracció generalitzada de l'ancestre, i per tant, per 3), la suma és extracció generalitzada de l'ancestre. Aquesta, a més, es positiva, per tal que l'aigua present en el node destí segueixi una llei rectangular positiva. En total, l'arc és extracció d'una extracció generalitzada positiva de l'ancestre i, per 2), extracció generalitzada de l'ancestre.

Repetint el procediment fins que el conjunt d'arcs de tipus II és buit, tindrem que tots els arcs són extracció generalitzada de l'ancestre o l'ancestre mateix. Per 4), l'ancestre és coherent, i per 1), ho són tots els arcs.

■

4. MÉS DE DOS INTERVALS

El pas a una xarxa de més de dos intervals requereix algunes consideracions addicionals, degudes al fet, fàcilment observable, que si $\mathbf{X}$ és aproximada per $h(\mathbf{X})$, les variables $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ i $\mathbf{X} + h(\mathbf{X})$ no tenen perquè compartir les mateixes quantiles d'ordres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Per tal de fer que una variable d'aportació natural en el tercer interval, que anomenarem $\mathbf{Z}$, passi a ser totalment dependent de la variable corresponent del primer interval, $\mathbf{X}$, podriem optar pel mètode simple de considerar el núvol de punts $\{(x_i, z_i),\ i = 1, \ldots, n\}$, i procedir de la mateixa manera que amb els intervals primer i segon. Això té l'inconvenient de menysprear completament la influència de la segona variable, $\mathbf{Y}$, sobre $\mathbf{Z}$, quedant el condicionament subordinat a la influència de $\mathbf{X}$, la més llunyana en el temps. És més lògic considerar el núvol $\{(x_i+y_i, z_i),\ i=1,\dots,n\}$, obtenint una aproximació de $E[\mathbf{Z}/\mathbf{X}+\mathbf{Y}]$ per una funció de $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ lineal a trossos. En aquest apartat notarem per h_2 aquesta aproximació i per h_1 l'aproximació lineal a trossos de $E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]$, ja estudiada.

Definirem h_2 com

$$h_2(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = \begin{cases} A^0 + \dfrac{A^1}{X^1+h_1(\mathbf{X})^1}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}-(X^0+h_1(\mathbf{X})^0)), \\ \quad \text{si } X^0+h_1(\mathbf{X})^0 \le \mathbf{X}+\mathbf{Y} \le \\ \quad\quad X^0+h_1(\mathbf{X})^0+X^1+h_1(\mathbf{X})^1 \\ A^0+A^1+\dfrac{A^2}{X^2+h_1(\mathbf{X})^2}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}-(X^0+h_1(\mathbf{X})^0+X^1+h_1(\mathbf{X})^1)), \\ \quad \text{si } X^0+h_1(\mathbf{X})^0+X^1+h_1(\mathbf{X})^1 \le \mathbf{X}+\mathbf{Y} \le \\ \quad\quad X^0+h_1(\mathbf{X})^0+X^1+h_1(\mathbf{X})^1+X^2+h_1(\mathbf{X})^2 \\ A^0+A^1+A^2+\dfrac{A^3}{X^3+h_1(\mathbf{X})^3}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}- \\ \quad\quad (X^0+h_1(\mathbf{X})^0+X^1+h_1(\mathbf{X})^1+X^2+h_1(\mathbf{X})^2)), \\ \quad \text{si } X^0+h_1(\mathbf{X})^0+X^1+h_1(\mathbf{X})^1+X^2+h_1(\mathbf{X})^2 \le \mathbf{X}+\mathbf{Y} \le \\ \quad\quad X^0+h_1(\mathbf{X})^0+X^1+h_1(\mathbf{X})^1+X^2+h_1(\mathbf{X})^2+X^3+h_1(\mathbf{X})^3, \end{cases}$$

on A^0, A^1, A^2, A^3 s'obtenen, com a l'apartat III.1, a partir de la quaterna òptima (a_0, a_1, a_2, b_0) de l'aproximació en norma euclidiana per un element del subspai $\mathcal{V}$, i $(h_1(\mathbf{X})^0, h_1(\mathbf{X})^1, h_1(\mathbf{X})^2, h_1(\mathbf{X})^3)$ és el paràmetre de la llei rectangular de $h_1(\mathbf{X})$. La diferència amb l'aproximació de $E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]$ per h_1 és que no hem usat les quantiles d'ordres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$, deduïdes del núvol de punts, sino les de $\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X})$, lleugerament diferents. Hem usat també que $[\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X})]^i = X^i + h_1(\mathbf{X})^i$, $i=0,1,2,3$.

Abans de continuar, cal notar que $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ no conté tota la informació del vector aleatori $(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ i que $h_2(\mathbf{X}+\mathbf{Y})$ no és tampoc una variable totalment dependent de $\mathbf{X}$. El que necessitem en realitat és aproximar $E\left[E[\mathbf{Z}/\mathbf{X}+\mathbf{Y}]/\mathbf{X}\right]$, que sí té en compte tota la informació de $(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ i és totalment dependent de $\mathbf{X}$.

Definida l'aproximació de $E[\mathbf{Z}/\mathbf{X}+\mathbf{Y}]$ per $h_2(\mathbf{X}+\mathbf{Y})$, proposem com a aproximació de $E\left[E[\mathbf{Z}/\mathbf{X}+\mathbf{Y}]/\mathbf{X}\right]$ la funció $h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X}))$, que resulta de substituir formalment $\mathbf{Y}$ per $h_1(\mathbf{X})$. Ara és clar perquè cal usar les quantiles de $\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X})$ en lloc de les de $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ al construir h_2.

Usant $h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X}))$ com a aportació natural del tercer interval, la dependència total de la del primer permet construir l'arc ancestre de tots tres intervals i això al seu torn demostrar la coherència de la xarxa. Per al quart interval, podem procedir anàlogament, començant per l'aproximació de l'esperança condicionada de la quarta variable d'aportació a la suma de les tres anterior, i així, iterant el procés, obtindrem la coherència de tota la xarxa replicada.

Seria interessant acompanyar aquests raonaments heurístics d'un estudi de l'error comès en les aproximacions. En el següent apartat donem una idea en què es podria basar aquest estudi.

5. SOBRE L'ERROR D'APROXIMACIÓ

Sigui $L^2(\Omega)$ l'espai de les variables aleatòries sobre Ω amb moment de segon ordre, on $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ s'identifiquen si $\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{Y}(\omega)\}$ té probabilitat 1. Pel fet de ser acotades, les variables amb què estem treballant tenen moments de tots els ordres i per tant, en particular, pertanyen a aquest espai.

En $L^2(\Omega)$ podem definir el producte escalar $(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \int_\Omega \mathbf{X}(\omega) \cdot \mathbf{Y}(\omega) p(d\omega)$, amb norma associada $||\mathbf{X}|| = (\mathbf{X}|\mathbf{X})^{1/2} = \left(\int_\Omega \mathbf{X}^2(\omega) p(d\omega) \right)^{1/2}$. La topologia així definida és completa, d'on resulta que $L^2(\Omega)$ és un *espai de Hilbert.* Els espais de Hilbert generalitzen a dimensió infinita en molts sentits els espais $\mathbb{R}^n$ dotats de la norma euclidiana $||\vec{x}|| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$. En particular, té sentit parlar de l'aproximació per mínims quadrats en $L^2(\Omega)$:

Diem que $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{V}$ és la millor aproximació de $\mathbf{X} \in L^2$ en un subspai vectorial tancat $\mathcal{V} \subset L^2$ si $||\mathbf{X} - \mathbf{Y}_0|| = \min_{\mathbf{Y} \in \mathcal{V}} ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$. El Teorema de la Projecció ens assegura que $\mathbf{Y}_0$ existeix i és únic.

Si $\mathcal{H}$ és un espai de Hilbert, i $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ un subspai de $\mathcal{H}$, un operador lineal $\pi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ s'anomena *projecció sobre* $\mathcal{V}$ si $\pi(\mathcal{H}) = \mathcal{V}$ i $\pi \circ \pi = \pi$. π existeix i és únic per a cada $\mathcal{V}$, i compleix a més que $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{V}$ és la millor aproximació de $\mathbf{X} \in \mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ si i només si $\pi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}_0$. Es comprova fàcilment que les projeccions compleixen $||\pi(\mathbf{X})|| \leq ||\mathbf{X}||, \forall \mathbf{X}$.

Les esperances condicionades es poden caracteritzar com a projeccions a l'espai L^2. En concret:

Lema

Sigui $\mathbf{X}$ una variable aleatòria qualsevol i $\mathbf{Y} \in L^2$. Aleshores:

a) $E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}] \in L^2$.

b) $\mathcal{V} = \{E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}] : \mathbf{Y} \in L^2\}$ és el subspai vectorial de L^2 format per les variables que depenen totalment de $\mathbf{X}$.

c) L'aplicació

$$E[\cdot/\mathbf{X}] : \quad \begin{array}{l} L^2 \longrightarrow L^2 \\ \mathbf{Y} \longrightarrow E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}] \end{array}$$

és la projecció de L^2 sobre $\mathcal{V}$.

■

Essent doncs $E[\cdot/\mathbf{X}]$ una projecció, tenim la propietat de disminució de la norma

$$\left(\int_\Omega E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]^2(\omega)p(d\omega)\right)^{1/2} = ||E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]|| \leq ||\mathbf{Y}|| = \left(\int_\Omega \mathbf{Y}^2(\omega)p(d\omega)\right)^{1/2}$$

Usant aquesta propietat, es té

$$\begin{aligned} &||E\left[E[\mathbf{Z}/\mathbf{X}+\mathbf{Y}]/\mathbf{X}\right] - h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X}))|| \leq \\ &||E\left[E[\mathbf{Z}/\mathbf{X}+\mathbf{Y}]/\mathbf{X}\right] - E\left[h_2(\mathbf{X}+\mathbf{Y})/\mathbf{X}\right]|| + ||E\left[h_2(\mathbf{X}+\mathbf{Y})/\mathbf{X}\right] - \\ &-h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X}))|| \leq \\ &||E[\mathbf{Z}/\mathbf{X}+\mathbf{Y}] - h_2(\mathbf{X}+\mathbf{Y})|| + ||E\left[h_2(\mathbf{X}+\mathbf{Y})/\mathbf{X}\right] - h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X}))||\,. \end{aligned}$$

El primer sumand és l'error comés al transformar $\mathbf{Z}$ en una funció de $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ lineal a trossos. No podem donar una fita d'aquest error, però sabem que és mínim en la norma de L^2 donats l'espai aproximador $\mathcal{V}$ i la taula de valors que suposem representa a $E[\mathbf{Z}/\mathbf{X}+\mathbf{Y}]$.

El segon sumand és més complicat d'avaluar. Tenint en compte la forma de h_2 i la linealitat de l'operador esperança condicionada, es pot posar com

$$||h_2(\mathbf{X}+E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]) - h_2\left(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X})\right)||.$$

Notem, per simplificar, $I^i = [X^0+h_1(\mathbf{X})^0+\cdots+X^i+h_1(\mathbf{X})^i, X^0+h_1(\mathbf{X})^0+\cdots+X^{i+1}+h_1(\mathbf{X})^{i+1}[$, i considerem els subconjunts de Ω definits com

$$\Omega_{i,j} = \left\{\omega : (\mathbf{X}+E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}])(\omega) \in I^i, \left(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X})\right)(\omega) \in I^j\right\};\; i=0,1,2; j=0,1,2.$$

Clarament, $p\left(\bigcup_{i,j=0}^2 \Omega_{ij}\right) = 1$. Sobre $\bigcup_{i=0}^2 \Omega_{i,i}$ és té

$$h_2(\mathbf{X}+E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]) - h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X})) =$$
$$\begin{cases} \dfrac{A^1}{X^1+h_1(\mathbf{X})^1}\left(E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]-h_1(\mathbf{X})\right), & \text{si } \omega\in\Omega_{0,0} \\ \dfrac{A^2}{X^2+h_1(\mathbf{X})^2}\left(E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]-h_1(\mathbf{X})\right), & \text{si } \omega\in\Omega_{1,1} \\ \dfrac{A^3}{X^3+h_1(\mathbf{X})^3}\left(E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]-h_1(\mathbf{X})\right), & \text{si } \omega\in\Omega_{2,2} \end{cases}$$

d'on

$$\begin{aligned} &\|h_2(\mathbf{X}+E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]) - h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X}))\| = \\ &\sum_{i=0}^{2}\frac{A^{i+1}}{X^{i+1}+h_1(\mathbf{X})^{i+1}}\left(\int_{\Omega_{i,i}}\left(E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]-h_1(\mathbf{X})\right)^2(\omega)p(d\omega)\right)^{1/2} + \\ &\left(\int_{\Omega-\bigcup_{i=0}^{2}\Omega_{i,i}}\left[h_2(\mathbf{X}+E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]) - h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X}))\right]^2(\omega)p(d\omega)\right)^{1/2} \leq \\ &\left(\max_i\frac{A^{i+1}}{X^{i+1}+h_1(\mathbf{X})^{i+1}}\right)\cdot\left(\int_{\bigcup_{i=0}^{2}\Omega_{i,i}}\left(E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]-h_1(\mathbf{X})\right)^2(\omega)p(d\omega)\right)^{1/2} + \\ &\left(\int_{\Omega-\bigcup_{i=0}^{2}\Omega_{i,i}}\left[h_2(\mathbf{X}+E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]) - h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X}))\right]^2(\omega)p(d\omega)\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

El factor $\left(\int_{\bigcup_{i=0}^{2}\Omega_{i,i}}\left(E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]-h_1(\mathbf{X})\right)^2(\omega)p(d\omega)\right)^{1/2}$ és una bona aproximació de $\|E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]-h_1(\mathbf{X})\|$, ja que és d'esperar que amb probabilitat alta es verifiqui

$$h_1(\mathbf{X})(\omega)\in I^i \implies E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}](\omega)\in I^i,$$

doncs precisament $h_1(\mathbf{X})$ s'ha construït intentant aproximar $E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]$. Al mateix temps, el conjunt complementari $\Omega-\bigcup_{i=0}^{2}\Omega_{i,i}$ tindrà una probabilitat petita i la contribució de la segona integral no serà massa significativa.

D'aquesta manera s'aconsegueix posar l'error d'aproximar $E\left[E[\mathbf{Z}/\mathbf{X}+\mathbf{Y}]/\mathbf{X}\right]$ per $h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X}))$ en funció dels errors de la aproximació de $E[\mathbf{Z}/\mathbf{X}+\mathbf{Y}]$ per $h_2(\mathbf{X}+\mathbf{Y})$ i de $E[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]$ per $h_1(\mathbf{X})$, i això pot ser un principi útil per a l'estudi de l'error global del mètode. No obstant, cal primer un càlcul més detallat per estimar $\|E[h_2(\mathbf{X}+\mathbf{Y})/\mathbf{Z}] - h_2(\mathbf{X}+h_1(\mathbf{X}))\|$, que depèn en últim terme del procediment exacte que s'utilitzi per determinar les quantiles de les distribucions a partir dels núvols de punts i, per descomptat, de paràmetres estadístics com ara el tamany de les mostres emprades.

IV. DIVERSES CONQUES

Fins aquí hem restringit el problema al cas d'una sola conca, és a dir, al cas en què la xarxa d'embassaments té una sola component connexa. Dedicarem aquesta secció a estendre els mètodes exposats al cas de xarxes amb més d'una conca. Una forma diferent de fer el pas a diverses conques ha estat apuntada per Nabona en [5].

Acabarem també el càlcul de la funció objectiu de l'exemple iniciat a l'apartat I.6.

1. L'EXTENSIÓ A DIVERSES CONQUES

Per estudiar el problema de diverses conques amb tota generalitat, establirem una partició del conjunt de conques de la xarxa segons la relació d'equivalència següent: Dues conques estaran relacionades si i només si les respectives aportacions naturals no són independents. Anomenarem *agrupació* de conques a cada partició per aquesta relació d'equivalència. Així, conques de diferents agrupacions tindran sempre aportacions naturals independents.

La diferència essencial entre el pas a diversos intervals i el pas a diverses conques està en el fet que aigues de dues conques no es barregen mai, la qual cosa fa que el cas d'independència sigui aquí el més senzill. Agrupacions diferents de conques es tractaran cadascuna per separat, pel que fa referència a les dades d'aportació natural, i només interaccionaran al calcular la funció objectiu.

Situats en una agrupació donada, hi ha diverses maneres de construir la dependència total entre totes les aportacions naturals de diferents conques. La que exposem tot seguit és una de les possibles.

Sigui m_1 el nombre de punts d'aportació de la primera conca (sense replicar) i m_2 el de la segona. En el que segueix utilitzarem els superíndexos per a distingir punts d'aportació i els subíndexos per a distingir intervals.

Siguin $\mathbf{X}_1^1, \ldots, \mathbf{X}_1^{m_1}$ les variables d'aportació natural en el primer interval de la primera conca, i $\mathbf{Y}_1^1, \ldots, \mathbf{Y}_1^{m_2}$ les de la segona.

Sigui $\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{m_1} \mathbf{X}_1^i$.

Siguin $g_1^j(\mathbf{T})$ les aproximacions lineals a trossos, construïdes pel mètode usat a l'apartat [III.1], de $E\left[\mathbf{Y}_1^j/\mathbf{T}\right]$, per $j = 1, \ldots, m_2$. És a dir,

$$g_1^j(\mathbf{T}) = \begin{cases} A^0 + \dfrac{A^1}{T^1}(\mathbf{T} - T^0), & \text{si } T^0 \le \mathbf{T} \le T^0 + T^1 \\ A^0 + A^1 + \dfrac{A^2}{T^2}(\mathbf{T} - (T^0 + T^1)), & \text{si } T^0 + T^1 \le \mathbf{T} \le \\ & \quad T^0 + T^1 + T^2 \\ A^0 + A^1 + A^2 + \dfrac{A^3}{T^3}(\mathbf{T} - (T^0 + T^1 + T^2)), & \text{si } T^0 + T^1 + T^2 \le \mathbf{T} \le \\ & \quad T^0 + T^1 + T^2 + T^3 \end{cases}$$

on (T^0, T^1, T^2, T^3) és el paràmetre de la llei rectangular de $\mathbf{T}$. Com que les $\mathbf{X}_1^i$, $i = 1, \ldots, m_1$ són totalment dependents de $\mathbf{X}_1^1$ mitjançant certes funcions de dependència rectangular f_i, $g_i^j(\mathbf{T})$ és de fet dependent (rectangularment) de $\mathbf{X}_1^1$ i segueix per tant una llei rectangular de paràmetre (A^0, A^1, A^2, A^3). Observi's que $g_1^j(\mathbf{T})$ es pot construir mitjançant el núvol de punts $\{(t^\ell, y_1^{j,\ell})\}_\ell$ (aquí hem notat per $\{t^\ell\}_\ell$ la mostra disponible de $\mathbf{T}$ i per $\{y_1^{j,\ell}\}_\ell$ la de $\mathbf{Y}_1^j$), però cal emprar les quantiles de $\mathbf{X}_1^1 + f_2(\mathbf{X}_1^2) + \cdots + f_{m_1}(\mathbf{X}_1^{m_1})$, en lloc de les que es puguin deduir del núvol, pel mateix motiu exposat a l'apartat III.4. Aquestes haurien de ser, teòricament, iguals a les de $\mathbf{T}$, per la hipòtesi de "igual proporció" entre les $\mathbf{X}_1^i$. Si això fos estrictament cert, podriem optar també pel procediment més simple d'utilitzar $E\left[\mathbf{Y}_1^j/\mathbf{X}_1^1\right]$ (és a dir, d'ajustar una funció lineal a trossos a partir del núvol $\{(x_1^{1,\ell}, y_1^{j,\ell})\}_\ell$). No obstant, usar $\mathbf{T}$ és més acurat, ja que es poden corregir així petites desviacions del model.

Tenim d'aquesta manera determinades les entrades en el primer interval de la segona conca: En el punt d'aportació j, l'entrada teòrica és $E\left[\mathbf{Y}_1^j/\mathbf{T}\right]$ i l'entrada real per a l'algorisme multiarticle A^0, A^1, A^2, A^3, amb (A^0, A^1, A^2, A^3) el paràmetre de la llei rectangular de la variable $g_1^j(\mathbf{T})$, aproximadora de $E\left[\mathbf{Y}_1^j/\mathbf{T}\right]$.

Passem ara al segon interval de la segona conca. Anomenarem $\mathbf{Y}_2^1, \ldots, \mathbf{Y}_2^{m_2}$ les aportacions naturals. Podem construir les aproximacions $h_{1,2}^j(\mathbf{Y}_1^j)$ de $E\left[\mathbf{Y}_2^j/\mathbf{Y}_1^j\right]$ pel procediment habitual i després condicionar aquesta variable per

$\mathbf{T}$. Si les $h_{1,2}^{j}(\mathbf{Y}_1^j)$ s'obtenen utilitzant les quantiles de $g_1^j(\mathbf{T})$ i el condicionament a $\mathbf{T}$ es fa per substitució formal de $\mathbf{Y}_1^j$ per $g_1^j(\mathbf{T})$ en la fórmula de $h_{1,2}^j(\mathbf{Y}_1^j)$ (mateix procediment vist al estudiar el tercer interval en una sola conca), la variable resultant $h_{1,2}^j\left(g_1^j(\mathbf{T})\right)$ dependrà rectangularment de $\mathbf{T}$. L'entrada teòrica és $E\left[E\left[\mathbf{Y}_2^j/\mathbf{Y}_1^j\right]/\mathbf{T}\right]$ i l'entrada per al algorisme multiarticle les quantitats d'articles determinats per la llei rectangular de $h_{1,2}^j\left(g_1^j(\mathbf{T})\right)$.

Per al tercer interval, si anomenem $\mathbf{Y}_3^1, \ldots, \mathbf{Y}_3^{m_2}$ les aportacions naturals, comencem aproximant $E\left[E\left[\mathbf{Y}_3^j/\mathbf{Y}_1^j + \mathbf{Y}_2^j\right]/\mathbf{Y}_1^j\right]$. Per a $E\left[\mathbf{Y}_3^j/\mathbf{Y}_1^j + \mathbf{Y}_2^j\right]$ s'obté $h_{2,2}^j(\mathbf{Y}_1^j + \mathbf{Y}_2^j)$ utilitzant les quantiles de $g_1^j(\mathbf{T}) + h_1^j\left(g_1^j(\mathbf{T})\right)$. Fent la substitució formal de $\mathbf{Y}_2^j$ per $h_{1,2}^j(\mathbf{Y}_1^j)$ obtenim $h_{2,2}^j\left(\mathbf{Y}_1^j + h_{1,2}^j(\mathbf{T}_1^j)\right)$ com a aproximació del condicionament per $\mathbf{Y}_1^j$. Finalment, substituint formalment $\mathbf{Y}_1^j$ per $g_1^j(\mathbf{T})$, obtenim l'entrada algorísmica $h_{2,2}^j\left(g_1^j(\mathbf{T}) + h_{1,2}^j\left(g_1^j(\mathbf{T})\right)\right)$ per a l'entrada teòrica $E\left[E\left[\mathbf{Y}_3^j/\mathbf{Y}_1^j + \mathbf{Y}_2^j\right]/\mathbf{Y}_1^j, \mathbf{T}\right]$.

Per al quart interval i successius se seguirà el mateix mètode de construcció d'aproximacions per a les variables teòriques $E\left[E\left[\mathbf{Y}_4^j/\mathbf{Y}_1^j + \mathbf{Y}_2^j + \mathbf{Y}_3^j\right]/\mathbf{Y}_1^j, \mathbf{Y}_2^j, \mathbf{T}\right]$, $E\left[E\left[\mathbf{Y}_5^j/\mathbf{Y}_1^j + \mathbf{Y}_2^j + \mathbf{Y}_3^j + \mathbf{Y}_4^j\right]/\mathbf{Y}_1^j, \mathbf{Y}_2^j, \mathbf{Y}_3^j, \mathbf{T}\right]$, etz.

Situem-nos ara a la tercera conca de l'agrupació. Podem aplicar exactament el mateix que acabem de fer per a la segona conca, condicionant a l'aportació natural global de la primera, $\mathbf{T}$, o bé, més acuradament, utilitzar les aportacions naturals globals de primera i segona conques. Anomenarem aquestes variables $\mathbf{T}_1$ i $\mathbf{T}_2$ ($\mathbf{T}_1$ és la $\mathbf{T}$ anterior). Sigui m_3 el nombre de punts d'aportació de la tercera conca (sense replicar). Siguin $\mathbf{Z}_i^1, \ldots, \mathbf{Z}_i^{m_3}$ les variables d'aportació a aquests punts en l'interval i.

En el primer interval, s'usaran les variables teòriques $E\left[E\left[\mathbf{Z}_1^j/\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\right]/\mathbf{T}_1\right]$, que podem aproximar segons el model ja vist: Si $\{t_1^\ell\}_\ell$ i $\{t_2^\ell\}_\ell$ són les mostres disponibles de $\mathbf{T}_1$ i $\mathbf{T}_2$, s'utilitza el núvol de punts $\{(t_1^\ell + t_2^\ell, z_1^{j,\ell})\}_\ell$ amb les quantiles de $\mathbf{X}_1^1 + f_2(\mathbf{X}_1^2) + \cdots + f_{m_1}(\mathbf{X}_1^{m_1}) + g_1^1(\mathbf{T}_1) + \cdots + g_1^{m_2}(\mathbf{T}_1)$, resultant una aproximació de $E\left[\mathbf{Z}_1^j/\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\right]$. Substituint formalment després $\mathbf{T}_2$ per $g_1^1(\mathbf{T}_1) + \cdots + g_1^{m_2}(\mathbf{T}_1)$ obtenim l'aproximació lineal a trossos, que anomenarem $g_2^j(\mathbf{T}_1)$, de $E\left[E\left[\mathbf{Z}_1^j/\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\right]/\mathbf{T}_1\right]$.

Per al segon interval, aproximem $E\left[\mathbf{Z}_2^j/\mathbf{Z}_1^j\right]$ per una funció $h_{1,3}^j(\mathbf{Z}_1^j)$ utilitzant les quantiles de $g_2^j(\mathbf{T}_1)$. Substituint formalment $\mathbf{Z}_1^j$ per $g_2^j(\mathbf{T}_1)$, tindrem $h_{1,3}^j\left(g_2^j(\mathbf{T}_1)\right)$ com a aproximació de l'entrada teòrica $E\left[E\left[\mathbf{Z}_2^j/\mathbf{Z}_1^j\right]/\mathbf{T}_1\right]$. Per al tercer, volem aproximar $E\left[E\left[\mathbf{Z}_3^j/\mathbf{Z}_1^j+\mathbf{Z}_2^j\right]/\mathbf{Z}_1^j,\mathbf{T}_1\right]$. El primer condicionament cal fer-lo amb les quantiles de $g_2^j(\mathbf{T}_1)+h_{1,3}^j(\mathbf{Z}_1^j)$, el segon mitjançant la substitució formal de $\mathbf{Z}_2^j$ per $h_{1,3}^j(\mathbf{Z}_1^j)$, seguida de la substitució formal de $\mathbf{Z}_1^j$ per $g_2^j(\mathbf{T}_1)$, resultant una funció $h_{2,3}^j\left(g_2^j(\mathbf{T}_1)+h_{1,3}^j\left(g_2^j(\mathbf{T}_1)\right)\right)$, dependent rectangularment de $\mathbf{T}_1$.

Anàlogament per als següents intervals. Iterant el procés fins a la última conca de l'agrupació, hem substituit les variables vertaderes per variables aproximadores, totes elles amb lleis rectangulars i totalment dependents rectangularment d'una sola. Com ja hem vist, això dóna lloc a a la coherència de tots els arcs i per tant a la consistència de l'algorisme multiarticle.

Cal notar que, per a què aquest mètode funcioni, no hem de condicionar mai a una variable amb llei rectangular no positiva. Es necessari doncs, que els condicionaments $E\left[\mathbf{Y}_1^j/\mathbf{T}_1\right]$, $E\left[E\left[\mathbf{Z}_1^j/\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\right]/\mathbf{T}_1\right],\ldots$ (variables d'entrada en el primer interval de les conques segona, tercera, etz.) segueixin lleis rectangulars positives. En cas contrari no seria possible mantenir les restriccions de no negativitat de les variables del problema multiarticle.

Afegim per acabar l'apartat unes taules recapitulatives. La primera conté les entrades teòriques per a les tres primeres conques i els quatre primers intervals. Les notacions són les mateixes que hem anat introduint, llevat que s'han suprimit els superíndexos j indicadors del número de punt d'aportació. La segona conté, per a cada conca i interval, la següent informació:

- El núvol de punts al qual s'aplica la regressió lineal a trossos per obtenir la funció aproximadora.

- La funció lineal a trossos així obtinguda, $h_{i,k}(\mathbf{V}_1+\cdots+\mathbf{V}_i)$, que és l'aproximació de $E\left[\mathbf{V}_{i+1}/\mathbf{V}_1+\cdots+\mathbf{V}_i\right]$, amb $\mathbf{V}_1,\ldots,\mathbf{V}_{i+1}$ les aportacions naturals en els intervals $1,\ldots,i+1$ de la conca k.

- Substitucions formals que representen el condicionament de $E\left[\mathbf{V}_{i+1}/\mathbf{V}_1+\cdots+\mathbf{V}_i\right]$ a $\mathbf{V}_1,\ldots,\mathbf{V}_{i-1}$ i a $\mathbf{T}_1$.

- La variable aleatòria que finalment s'utilitzarà com a entrada a l'algorisme. En realitat s'usaran els volums d'articles que determina la llei rectangular d'aquesta variable.

Remarquem de nou que les $h_{i,k}$ s'han de calcular usant les quantiles del que serà el seu argument final després de les substitucions formals. Per exemple, $h_{2,2}$ es calcula usant el núvol de $(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)$ però les quantiles de $g_1(\mathbf{T}_1) + h_{1,2}(g_1(\mathbf{T}_1))$.

	INTERVAL 1	INTERVAL 2
CONCA 1	$\mathbf{X}_1$	$E[\mathbf{X}_2/\mathbf{X}_1]$
CONCA 2	$E[\mathbf{Y}_1/\mathbf{T}_1]$	$E[E[\mathbf{Y}_2/\mathbf{Y}_1]/\mathbf{T}_1]$
CONCA 3	$E[E[\mathbf{Z}_1/\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2]/\mathbf{T}_1]$	$E[E[\mathbf{Z}_2/\mathbf{Z}_1]/\mathbf{T}_1]$

	INTERVAL 3	INTERVAL 4
CONCA 1	$E[E[\mathbf{X}_3/\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2]/\mathbf{X}_1]$	$E[E[\mathbf{X}_4/\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3]/\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$
CONCA 2	$E[E[\mathbf{Y}_3/\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2]/\mathbf{Y}_1, \mathbf{T}_1]$	$E[E[\mathbf{Y}_4/\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3]/\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{T}_1]$
CONCA 3	$E[E[\mathbf{Z}_3/\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2]/\mathbf{Z}_1, \mathbf{T}_1]$	$E[E[\mathbf{Z}_4/\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3]/\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{T}_1]$

	INTERVAL 1	INTERVAL 2	INTERVAL 3	INTERVAL 4
CONCA 1				
Núvol	–	$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$	$(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3)$	$(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_4)$
Funció aproximadora	-	$h_{1,1}(\mathbf{X}_1)$	$h_{2,1}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)$	$h_{3,1}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3)$
Substitucions formals	–	–	$\mathbf{X}_2$ per $h_{1,1}(\mathbf{X}_1)$	$\mathbf{X}_3$ per $h_{2,1}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)$ $\mathbf{X}_2$ per $h_{1,1}(\mathbf{X}_1)$
Entrada al algorisme	$\mathbf{X}_1$	$h_{1,1}(\mathbf{X}_1)$	$h_{2,1}(\mathbf{X}_1 + h_{1,1}(\mathbf{X}_1))$	$h_{3,1}(\mathbf{X}_1 + h_{1,1}(\mathbf{X}_1)$ $+h_{2,1}(\mathbf{X}_1 + h_{1,1}(\mathbf{X}_1)))$
CONCA 2				
Núvol	$(\mathbf{T}_1, \mathbf{Y}_1)$	$(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$	$(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)$	$(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4)$
Funció aproximadora	$g_1(\mathbf{T}_1)$	$h_{1,2}(\mathbf{Y}_1)$	$h_{2,2}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)$	$h_{3,2}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)$
Substitucions formals	–	$\mathbf{Y}_1$ per $g_1(\mathbf{T}_1)$	$\mathbf{Y}_2$ per $h_{1,2}(\mathbf{Y}_1)$ $\mathbf{Y}_1$ per $g_1(\mathbf{T}_1)$	$\mathbf{Y}_3$ per $h_{2,2}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)$ $\mathbf{Y}_2$ per $h_{1,2}(\mathbf{Y}_1)$ $\mathbf{Y}_1$ per $g_1(\mathbf{T}_1)$
Entrada al algorisme	$g_1(\mathbf{T}_1)$	$h_{1,2}(g_1(\mathbf{T}_1))$	$h_{2,2}(g_1(\mathbf{T}_1) + h_{1,2}(g_1(\mathbf{T}_1)))$	$h_{3,2}(g_1(\mathbf{T}_1) + h_{1,2}(g_1(\mathbf{T}_1))$ $+h_{2,2}(g_1(\mathbf{T}_1) + h_{1,2}(g_1(\mathbf{T}_1))))$
CONCA 3				
Núvol	$(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2, \mathbf{Z}_1)$	$(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$	$(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3)$	$(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4)$
Funció aproximadora	$g_2(\mathbf{T}_1)$	$h_{1,3}(\mathbf{Z}_1)$	$h_{2,3}(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$	$h_{3,3}(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)$
Substitucions formals	-	$\mathbf{Z}_1$ per $g_2(\mathbf{T}_1)$	$\mathbf{Z}_1$ per $h_{1,3}(\mathbf{Z}_1)$ $\mathbf{Z}_1$ per $g_2(\mathbf{T}_1)$	$\mathbf{Z}_3$ per $h_{2,3}(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$ $\mathbf{Z}_2$ per $h_{1,3}(\mathbf{Z}_1)$ $\mathbf{Z}_1$ per $g_2(\mathbf{T}_1)$
Entrada al algorisme	$g_2(\mathbf{T}_1)$	$h_{1,3}(g_2(\mathbf{T}_1))$	$h_{2,3}(g_2(\mathbf{T}_1) + h_{1,3}(g_2(\mathbf{T}_1)))$	$h_{3,3}(g_2(\mathbf{T}_1) + h_{1,3}(g_2(\mathbf{T}_1))$ $+h_{2,2}(g_1(\mathbf{T}_1) + h_{1,2}(g_1(\mathbf{T}_1))))$

2. EXEMPLE (CONTINUACIÓ)

Ara podem acabar el càlcul de la funció objectiu de l'exemple iniciat a l'apartat I.6. Com s'estudia en Nabona [5],la funció de generació g_i^k associada a l'arc k a l'interval i depèn no sols de la component $x_{i,k}$ del vector (aleatori) $\vec{x}$ de fluxos reals, sino també dels volums inicial i final de l'aigua continguda en l'embassament des del qual es fa la descàrrega. Això vol dir una dependència del flux de diversos arcs "propers" a l'embassament en qüestió. A més, les g_i^k poden ser preses com a polinòmiques sense que la simplificació sigui massa restrictiva respecte la realitat. És a dir, si r és el grau dels polinomis,

$$g_i^k(\vec{x}) = \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_\eta \leq r \\ r_1,\ldots,r_\eta \in \mathbb{N}}} \xi_{r_1,\ldots,r_\eta} \cdot x_{t_1}^{r_1} \cdot \ldots \cdot x_{t_\eta}^{r_\eta},$$

per a un cert natural η, unes certes components $x_{t_1}, \ldots, x_{t_\eta}$ del vector de fluxos i un certs coeficients reals $\xi_{r_1,\ldots,r_\eta}$.

Com que, òbviament, g_i^k no dependrà més que de fluxos d'arcs de la mateixa conca, es tractarà d'una funció polinòmica involucrant fluxos totalment dependents entre sí, i per tant admetrà un expressió del tipus

$$g_i^k(\vec{x}) = \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_\eta \leq r \\ r_1,\ldots,r_\eta \in \mathbb{N}}} \xi_{r_1,\ldots,r_\eta} \cdot [h_{t_1}(x_0)]^{r_1} \cdot \ldots \cdot [h_{t_\eta}(x_0)]^{r_\eta},$$

on x_0 és el flux en un arc qualsevol i $h_{t_1}, \ldots, h_{t_\eta}$, són funcions de dependència rectangular. Llavors,

$$\int_\Omega g_i^k(\vec{x}(P,\omega))p(d\omega) = \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_\eta \leq r \\ r_1,\ldots,r_\eta \in \mathbb{N}}} \xi_{r_1,\ldots,r_\eta} \cdot \int_\Omega [h_{t_1}(x_0(P,\omega))]^{r_1} \cdot \ldots \cdot [h_{t_\eta}(x_0(P,\omega))]^{r_\eta} p(d\omega),$$

i com que $h_{t_1}, \ldots, h_{t_\eta}$ són funcions de x_0 lineals a trossos sobre els mateixos intervals $I_1 = [x_0^0, x_0^0 + x_0^1[$, $I_2 = [x_0^0 + x_0^1, x_0^0 + x_0^1 + x_0^2[$, $I_3 = [x_0^0 + x_0^1 + x_0^2, x_0^0 + x_0^1 + x_0^2 + x_0^3[$, determinats per la política P, el sumatori anterior s'expressa

$$\sum_{\substack{r_1+\cdots+r_\eta\leq r\\ r_1,\ldots,r_\eta\in\mathbf{N}}} \xi_{r_1,\ldots,r_\eta}\cdot\int_\Omega [Q_1(x_0(P,\omega))\cdot 1_{I_1} + Q_2(x_0(P,\omega))\cdot 1_{I_2}+$$

$$Q_3(x_0(P,\omega))\cdot 1_{I_3}]p(d\omega),$$

on Q_1, Q_2, Q_3 són polinomis de grau r.

Usant finalment que $x_0(P,\cdot)$ segueix una llei rectangular de paràmetre $(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, podem calcular la integral utilitzant la densitat d'aquesta llei, o sigui, com

$$\int_{\mathbf{R}}\left[\frac{\alpha_1-\alpha_0}{x_0^1}Q_1(x)\cdot 1_{I_1}(x)+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{x_0^2}Q_2(x)\cdot 1_{I_2}(x)+\frac{\alpha_3-\alpha_2}{x_0^3}Q_3(x)\cdot 1_{I_3}(x)\right]dx,$$

el resultat de la qual serà la generació esperada en l'arc k i interval temporal i sota la política P.

Això resol la integral

$$\int_\Omega [G_i(\vec{x}(P,\omega_1))]^m p_1(d\omega_1)$$

per $m=1$. Pel cas $m=2$, s'obtenen integrals del tipus

$$\int_\Omega g_i^k(\vec{x}(P,\omega))\cdot g_i^\ell(\vec{x}(P,\omega))p(d\omega),$$

per a les quals cal distingir si k i ℓ pertanyen a la mateixa agrupació de conques o no. En el primer cas, les funcions g_i^k i g_i^ℓ són, respecte x_0, polinomis de grau r a trossos sobre els mateixos intervals de $\mathbf{R}$, i per tant el producte és un polinomi de grau $2r$ a trossos que, via la densitat de $x_0(P,\cdot)$ determinada per la política, pot ser integrat fàcilment.

En el segon cas, els fluxos dels quals depèn g_i^k són independents d'aquells dels quals depèn g_i^ℓ, i això permet posar

$$\int_\Omega g_i^k(\vec{x}(P,\omega))\cdot g_i^\ell(\vec{x}(P,\omega))p(d\omega)=\int_\Omega g_i^k(\vec{x}(P,\omega))p(d\omega)\cdot\int_\Omega g_i^\ell(\vec{x}(P,\omega))p(d\omega),$$

reduient-se el càlcul al d'integrals ja vistes. El mateix raonament s'aplica per $m=3,\ldots,n$, descomposant en producte d'integrals de variables independents i calculant cada integral a través de la densitat.

En l'apèndix de Alabert [2] s'estudia amb detall el càlcul de la funció objectiu usant el model de funció de generació proposat per Nabona.

REFERÈNCIES

[1] **Alabert, A.** (1989). "Càlcul de moments de variables aleatòries a partir de quantiles". Report de Recerca 89/02, Facultat d'Informàtica de Barcelona (U.P.C.).

[2] **Alabert, A.** (1990). "Sobre la optimització de la producció hidroelèctrica en un sistema d'embassaments amb aportacions naturals d'aigua aleatòries". Report de Recerca 90/04, Facultat d'Informàtica de Barcelona (U.P.C.).

[3] **Balleriaux, H.- Jamouelle, E. - Linard de Guertechin, F.** (1967). "Simulation de l'explotation d'un parc de machines thermiques de production d'électricité couplé a des stations de pompage". *Revue d'Électricité de la Soc. Roy. Belge des Élect.*, vol. V.

[4] **Kennington, J.L. - Helgason, R.V.** (1980). *Algorithms for Newtwork Programmimg.* John Wiley & Sons.

[5] **Nabona, N.** (1988). "Coordinació hidro-tèrmica en la generació d'electricitat per fluxos no lineals multiarticle en xarxes". *Qüestiió,* vol. III.

[6] **Nabona, N.** (1988). "Implementació i extensions dels fluxos multiarticle en xarxes per descomposició dictada per preus". Report de Recerca 88/26, Facultat d'Informàtica de Barcelona (U.P.C.).

[7] **Stancu-Minasian, I.M.** (1984). *Stochastic Programming.* D. Reidel Publishing Company.

AGRAÏMENTS

Aquest treball ha estat parcialment finançat pel Departament d'Estadística i Investigació Operativa de la Universitat Politècnica de Catalunya, a través dels convenis TC606 i TC919 amb Red Eléctrica de España, S.A.

Agraeixo especialment al Dr. Narcís Nabona el donar-me l'oportunitat de contribuir en aquesta recerca sota la seva direcció.