QÜESTIIÓ, Vol 17, 2 pp. 245-264, 1993

ESTRATEGIAS ÓPTIMAS DE UN JUEGO BIPERSONAL DE SUMA CERO Y PUNTOS DE ENSILLADURA DEL CAMPO ESCALAR ASOCIADO

J. FREIXAS BOSCH*

Universitat Politècnica de Catalunya

Definimos el campo escalar asociado a un juego bipersonal de suma cero. Estudiamos la existencia y unicidad de puntos estacionarios y obtenemos la forma general de los mismos en el caso de unicidad. Se establece que todo punto estacionario es de ensilladura.

La importancia del estudio anterior queda reflejado al establecer la equivalencia entre las estrategias óptimas simples de un juego y los puntos estacionarios del campo escalar asociado.

El teorema de Shapley-Snow [2] proporciona un método sistemático para encontrar todas las estrategias óptimas de un juego, a partir del cálculo de las estrategias óptimas simples para cada submatriz regular.

Combinando la equivalencia vista y el Teorema de Shapley-Snow, podemos obtener todas las estrategias óptimas de un juego simple, a partir del cálculo de los puntos estacionarios para cada submatriz regular.

Para establecer algunos resultados hemos utilizado la matriz $n-$asociada en lugar de la matriz adjunta, puesto que la tenemos definida incluso para matrices no cuadradas y generaliza los resultados que pueden obtenerse utilizando matrices adjuntas.

Optimal strategies for a two-person zero sum game and saddle-points of the scalar field associated with the game.

Key words: Juegos bipersonales de suma cero. Cálculo de estrategias óptimas.

* J. Freixas Bosch. Dpt. Matemàtica Aplicada III. Escola d'Enginyers Tècnics de Manresa. Av. Bases de Manresa, 61-73. 08240 MANRESA.

–Article rebut el gener de 1992.
–Acceptat l'abril de 1993.

1. INTRODUCCIÓN

En el presente artículo definimos el campo escalar asociado a un juego bipersonal de suma cero, calculamos sus puntos de ensilladura, estableciendo en el caso matricial cuadrado condiciones para la existencia y unicidad de los mismos.

Dado un juego matricial no necesariamente cuadrado demostraremos que todo punto de ensilladura perteneciente a $X_n \times Y_m$ es solución simple del juego. Analizaremos la situación recíproca viendo que toda solución simple del juego es punto de ensilladura del campo escalar asociado perteneciente a $X_n \times Y_m$.

Extenderemos los resultados obtenidos y deduciremos un método basado en el cálculo de puntos de ensilladura para determinar todas las estrategias óptimas del juego.

Un *juego bipersonal de suma cero en forma normal* viene descrito por la terna $(N, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \pi)$.

Donde $N = \{1, 2\}$ simboliza a los dos jugadores.
$\Sigma_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\Sigma_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$ representan los conjuntos de estrategias puras para cada jugador.

$$\begin{array}{llll} \pi\colon & \Sigma_1 \times \Sigma_2 & \to & \mathbb{R}^2 \quad \forall (i,j) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2, \text{ con } \pi_1(i,j) + \pi_2(i,j) = 0. \\ & (i,j) & \to & (\pi_1(i,j),\ \pi_2(i,j)) \end{array}$$

Tal situación puede representarse mediante una matriz $\mathcal{A}$ de orden $m \times n$, siendo a_{ij} el pago que le corresponde al primer jugador, y $-a_{ij}$ el pago que le corresponde al segundo jugador cuando el primer jugador escoge la alternativa i y el segundo jugador escoge la alternativa j.

La extensión mixta del juego de suma cero dado en forma normal, se representa por (X, Y, K) donde X, Y, representan para cada uno de los jugadores, distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de sus estrategias puras:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \middle| x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\} \quad Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \middle| y_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}$$

donde la función de pagos $K\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ es $K(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$.

El teorema del minimax [VonNeumann-Morgenstern, 1944] asegura que la extensión mixta del juego tiene al menos un par de *estrategias óptimas* (x^0, y^0)

tal que: $\max_{x\in X}\min_{y\in Y} K(x,y) = K(x^0,y^0) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} K(x,y)$, siendo $v = K(x^0,y^0)$ el valor minimax del juego. Cada par de estrategias óptimas cumple: $K(x,y^0) \leq K(x^0,y^0) \leq K(x^0,y)$ siendo x,y elementos cualesquiera de X,Y respectivamente. Diremos que las estrategias óptimas son *simples* si $K(x,y^0) = K(x^0,y^0) = K(x^0,y)$.

Dado que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ con $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ con $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, podemos expresar la caracterización de la función K en función tan sólo de las variables independientes, de esta forma K será un campo escalar definido en $X_{m-1} \times Y_{n-1}$, siendo:

$$
\begin{aligned}
X_{m-1} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} : x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m-1} x_i \leq 1 \right\} \\
Y_{n-1} &= \left\{ y \in \mathbb{R}^{n-1} : y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n-1} y_j \leq 1 \right\}
\end{aligned}
$$

Siempre que escribamos x^0 indicará un vector fila, mientras que y^0 indicará un vector columna sólo cuando usemos operaciones matriciales, en otras situaciones indicará un vector fila.

K será un campo escalar definido en $X \times Y$, o bien definido en $X_{m-1} \times Y_{n-1}$ según en el contexto en el que nos encontremos.

2. PUNTOS DE ENSILLADURA DEL CAMPO ESCALAR ASOCIADO

Dada una matriz $\mathcal{A} = (a_{ij})$ cuadrada de orden $n+1$, con $n > 0$, el campo escalar K asociado a la matriz $\mathcal{A}$ es:

$$K(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \mathcal{A}_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j y_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_{ij} x_i y_j$$

donde: $\mathcal{A}_0 = a_{n+1\,n+1} \quad \mathcal{A}_k = a_{kn+1} - a_{n+1\,n+1}$

$\mathcal{B}_\ell = a_{n+1\ell} - a_{n+1\,n+1}$

$$\mathcal{C}_{kj} = (a_{kj} + a_{n+1\,n+1} - (a_{kn+1} + a_{n+1j})) = \Delta \begin{pmatrix} k & n+1 \\ j & n+1 \end{pmatrix}$$

$$j, k, \ell = 1, \ldots, n$$

Lema 2.1

a)

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \ldots & \mathcal{C}_{1k-1} & -\mathcal{A}_1 & \mathcal{C}_{1k+1} & \ldots & \mathcal{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \ldots & \mathcal{C}_{nk-1} & -\mathcal{A}_n & \mathcal{C}_{nk+1} & \ldots & \mathcal{C}_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} b_{i,n-k+2} = c_{n-k+2}$$

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \ldots & \mathcal{C}_{1k-1} & -\mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_{1k+1} & \ldots & \mathcal{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \ldots & \mathcal{C}_{nk-1} & -\mathcal{B}_n & \mathcal{C}_{nk+1} & \ldots & \mathcal{C}_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n+1} b_{n-k+2,j} = f_{n-k+2}$$

donde $k = 1, \ldots, n.$, siendo b_{ij} el elemento situado en la fila i–ésima (f_i), columna j–ésima (c_j) de la matriz n–asociada de $\mathcal{A}$. La matriz n–asociada de $\mathcal{A}$ está formada por todos los menores de orden n; dispuestos en orden lexicográfico y cada elemento, multiplicado por $(-1)^{i+j}$ (siendo i y j la fila y columna que ocupan en la matriz).

b)

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \ldots\ldots & \mathcal{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \ldots\ldots & \mathcal{C}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 1 & n+1 \end{pmatrix} & \ldots & \Delta \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 1 & n+1 \end{pmatrix} \\ & & \\ \Delta \begin{pmatrix} n & n+1 \\ 1 & n+1 \end{pmatrix} & \ldots & \Delta \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n & n+1 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij}$$

Demostración

a) Un elemento cualquiera de la matriz $\mathcal{C}$ (apartado b) es de la forma:

$$\mathcal{C}_{kj} = (a_{kj} - a_{n+1j}) - (a_{kn+1} - a_{n+1n+1}) = \overline{\mathcal{C}}_{kj} - \mathcal{A}_k \quad \text{para } k, j = 1, \ldots, n,$$

luego el determinante de la matriz $\mathcal{C}$, puede desarrollarse por columnas, quedando 2^n determinantes, de los cuales $2^n - (n+1)$ son nulos, al tener la columna $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k, \ldots, \mathcal{A}_n)^t$ repetida al menos dos veces, el determinante queda reducido a:

$$\det\mathcal{C} = \det \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \dots & \mathcal{C}_{1j} & \dots & \mathcal{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{k1} & \dots & \mathcal{C}_{kj} & \dots & \mathcal{C}_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \dots & \mathcal{C}_{nj} & \dots & \mathcal{C}_{nn} \end{pmatrix} = \det \overline{\mathcal{C}} + \sum_{j=1}^{n} \det\,(\mathcal{C}_j)$$

siendo:

$$\overline{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{C}}_{11} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{1j} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathcal{C}}_{k1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{kj} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathcal{C}}_{n1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{nj} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{nn} \end{pmatrix} ; \quad \mathcal{C}_j = \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{C}}_{11} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{1j-1} & -\mathcal{A}_1 & \overline{\mathcal{C}}_{1j+1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathcal{C}}_{k1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{kj-1} & -\mathcal{A}_k & \overline{\mathcal{C}}_{kj+1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathcal{C}}_{n1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{nj-1} & -\mathcal{A}_n & \overline{\mathcal{C}}_{nj+1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{nn} \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\det\,\mathcal{C}_j = \det \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \dots & \mathcal{C}_{1k-1} & -\mathcal{A}_1 & \mathcal{C}_{1k+1} & \dots & \mathcal{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \dots & \mathcal{C}_{nk-1} & -\mathcal{A}_n & \mathcal{C}_{nk+1} & \dots & \mathcal{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

1) *Cálculo del determinante de* $\overline{\mathcal{C}}$:

Al ser los elementos de la matriz de la forma $\overline{\mathcal{C}}_{kj} = (a_{kj} - a_{n+1j})$ y desarrollando el determinante de $\overline{\mathcal{C}}$ por filas obtenemos de nuevo 2^n determinantes de los cuales $2^n - (n+1)$ son nulos al tener repetida al menos dos veces la fila $(-a_{n+11}, \dots, -a_{n+1j}, \dots, -a_{n+1n})$, ahora $\det \overline{\mathcal{C}} = \det \overline{\mathcal{A}} + \sum_{k=1}^{n} \det \overline{\mathcal{A}}_k$, siendo:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathcal{A}}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-11} & \dots & a_{k-1j} & \dots & a_{k-1n} \\ -a_{n+11} & \dots & -a_{n+1j} & \dots & -a_{n+1n} \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1j} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

De la última matriz, trasladando la fila $k-$ésima, al último lugar, utilizando propiedades usuales de los determinantes y teniendo en cuenta la definición de matriz $n-$asociada, obtenemos:

$$\det \overline{\mathcal{A}} = b_{11} \qquad \text{y} \qquad \det \overline{\mathcal{A}}_k = b_{n-k+2,1}$$

Entonces: $\det \overline{\mathcal{C}} = \sum_{k=1}^{n+1} b_{n-k+2,1} = c_1$

2) *Cálculo del determinante de $\mathcal{C}_j$*

$$\det \mathcal{C}_j = \det \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{C}}_{11} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{1j-1} & -\mathcal{A}_1 & \overline{\mathcal{C}}_{1j+1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathcal{C}}_{k1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{kj-1} & -\mathcal{A}_k & \overline{\mathcal{C}}_{kj+1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathcal{C}}_{n1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{nj-1} & -\mathcal{A}_n & \overline{\mathcal{C}}_{nj+1} & \dots & \overline{\mathcal{C}}_{nn} \end{pmatrix}$$

siendo $\overline{\mathcal{C}}_{kj} = a_{kj} - a_{n+1j}$ y $\mathcal{A}_k = a_{kn+1} - a_{n+1\,n+1}$.

Desarrollando el determinante de $\mathcal{C}_j$ en filas, obtenemos 2^n determinantes de los cuales $2^n - (n+1)$ son nulos al tener al menos dos veces repetida la fila $(-a_{n+11}, \dots, -a_{n+1j-1}, a_{n+1\,n+1}, -a_{n+1j+1}, \dots, -a_{n+1n})$.

Trasladando la columna $k-$ésima al final y utilizando propiedades de determinantes, y la definición de matriz $n-$asociada resulta:

$$\det \mathcal{C}_j = \sum_{i=1}^{n+1} b_{i,n-j+2} = c_{n-j+2} \qquad \text{donde} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Con ello queda demostrado, la primera parte del apartado a). Análogamente se procedería para demostrar la segunda parte de a).

b) No hay más que observar los resultados obtenidos en 1) y 2) del apartado a).

$$\det \mathcal{C} = \det \overline{\mathcal{C}} + \sum_{j=1}^{n} \det (\mathcal{C}_j) = c_1 + \sum_{j=1}^{n} c_{n-j+2} = \sum_{j=1}^{n+1} c_j = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} b_{ij}$$

Teorema 2.2 EXISTENCIA DE PUNTOS DE ENSILLADURA

a) Existe un único punto de ensilladura del campo escalar K en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, si y sólo si, la suma de los elementos de la matriz $n-$asociada de $\mathcal{A}$ es distinto de cero.

En esta situación, el punto de ensilladura de K, puede determinarse a partir de la matriz $n-$asociada de $\mathcal{A}$ de la siguiente forma:

$$x_k^0 = \frac{f_{n-k+2}}{f_1 + \cdots f_{n+1}}, \quad y_k^0 = \frac{c_{n-k+2}}{c_1 + \cdots + c_{n+1}} \qquad \text{donde} \quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

b) El campo escalar K no tiene ningún punto de ensilladura en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ si y sólo si, la suma de los elementos de la matriz $n-$asociada es cero y existe un índice i tal que $f_i \neq 0$.

c) El campo escalar K tiene infinitos puntos de ensilladura en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, si y sólo si la suma de los elementos de la matriz $n-$asociada es cero y para cada $i = 1, 2, \ldots, n+1$ $f_i = c_i = 0$ y el rango $\mathcal{C} =$ rango $(\mathcal{C}, -\mathcal{A}) =$ rango $(\mathcal{C}^t, -\mathcal{B})$. donde

$$(\mathcal{C}, -\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \ldots & \mathcal{C}_{1n} & -\mathcal{A}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \ldots & \mathcal{C}_{nn} & -\mathcal{A}_n \end{pmatrix} \text{ y } (\mathcal{C}, -\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \ldots & \mathcal{C}_{1n} & -\mathcal{B}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \ldots & \mathcal{C}_{nn} & -\mathcal{B}_n \end{pmatrix}$$

Ello implica necesariamente que la matriz $\mathcal{A}$ es singular.

Demostración

a) Las condiciones de primer orden son:

$$\mathcal{A}_k + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_{kj} y_j = 0 \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\mathcal{B}_\ell + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{C}_{i\ell} x_i = 0 \qquad \text{para} \quad \ell = 1, 2, \ldots, n.$$

resultan dos sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. Si el determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{C}_{11} & \dots & \mathcal{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \dots & \mathcal{C}_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{entonces el sistema es compatible determinado.}$$

Si el juego matricial tiene la propiedad que la suma de los elementos de la matriz $n-$asociada no es cero, (apartado b, lema 2.1) entonces el sistema tiene solución única. Veamos ahora que el punto estacionario encontrado es de ensilladura. Evaluemos la matriz hessiana:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mathcal{C}_{11} & \dots & \mathcal{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{C}_{n1} & \dots & \mathcal{C}_{nn} \\ \mathcal{C}_{11} & \dots & \mathcal{C}_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{1n} & \dots & \mathcal{C}_{nn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser la matriz hessiana de orden par $(2n)$, para ver que el punto estacionario encontrado, es de ensilladura es suficiente con ver que el determinante es negativo.

Det $\mathcal{H} = -(\det \mathcal{C})(\det \mathcal{C}^t) = -(\det \mathcal{C})^2 < 0$. Ya que por hipótesis $\det\mathcal{C} \neq 0$

El punto de ensilladura encontrado aplicando la regla de Cramer en las condiciones de primer orden y utilizando los resultados obtenidos en el lema 2.1:

$$x_k^0 = \frac{f_{n-k+2}}{f_1 + \cdots + f_{n+1}} \quad \text{y} \quad y_k^0 = \frac{c_{n-k+2}}{c_1 + \cdots + c_{n+1}} \quad \text{donde} \quad k = 1, 2, \dots, n+1.$$

b) Si:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{C}_{11} & \dots & \mathcal{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \dots & \mathcal{C}_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{y existe } i \text{ tal que } f_i \neq 0; \text{ entonces:}$$

El rango de la matriz ampliada es n (apartado a, lema 2.1), mayor que el rango de la matriz $\mathcal{C}$ (que será $n-1$) por tanto el sistema es compatible indeterminado, luego no admite solución.

c) Si:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{C}_{11} & \dots & \mathcal{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \dots & \mathcal{C}_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad f_i = c_i = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Y además rango $\mathcal{C} =$ rango $(\mathcal{C}, -\mathcal{A}) =$ rango $(\mathcal{C}^t, \mathcal{B})$, entonces el sistema es compatible indeterminado y recíprocamente.

Veamos ahora que todo punto estacionario es de ensilladura, la matriz hessiana es de la forma:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \\ \mathcal{C}^t & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{siendo} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \dots & \mathcal{C}_{1j} & \dots & \mathcal{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{i1} & \dots & \mathcal{C}_{ij} & \dots & \mathcal{C}_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \dots & \mathcal{C}_{nj} & \dots & \mathcal{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

Con $r =$ rango $\mathcal{C} < n$.

Dada la existencia de puntos estacionarios $r > 0$, la matriz hessiana $\mathcal{H}$ es una forma bilineal simétrica. Veremos que su forma reducida tendrá al menos un 1 y un -1, de lo cual deduciremos que cualquier punto estacionario es de ensilladura.

Dado que el signo del determinante de una forma bilineal simétrica es invariante por cambios de base y al ser todos los menores principales de $\mathcal{H}$ nulos, utilizaremos un cambio de base adecuado que permita asegurar que la forma reducida de la matriz hessiana admite al menos un 1 y un -1. Usando el teorema de Gundenfinger ([1] página 306), consideremos $\mathcal{C}_{ij} \neq 0$, haciendo el cambio de base: e_1 por e_i y e_2 por e_{n+j}, obtenemos $|\mathcal{H}_2| = -(\mathcal{C}_{ij})^2 \neq 0$, con $|\mathcal{H}_1| = 0$ y $|\mathcal{H}_0| \neq 0$, luego la forma reducida tendrá al menos un 1 y un -1.

Nota: Para matrices *no* necesariamente cuadradas la situación del apartado a) no puede darse y haciendo un cambio de base análogo al del apartado c) resulta que todo punto estacionario es de ensilladura.

Veamos ahora que este caso tan sólo puede darse si $\mathcal{A}$ es singular.

Sea $\mathcal{A}$ una matriz de orden $n+1$. Sea $\mathcal{B}_n$ la matriz $n-$asociada de $\mathcal{A}$ con $f_i = c_j = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1$. Entonces det $\mathcal{A} = 0$.

La relación entre los elementos de la matriz $n-$asociada y los de la matriz adjunta de $\mathcal{A}$ es: $b_{ij} = \mathcal{A}_{n-i+2,n-j+2}$.

$$0 = f_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} \mathcal{A}_{n-i+2,n-j+2} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

De $-\mathcal{A}_{n-i+2,1} = \sum_{j=2}^{n+1} \mathcal{A}_{n-i+2,n-j+2} \qquad i = 1, 2, \dots, n+1$ deducimos que:

$|\mathrm{Adj}\mathcal{A}| = 0$. Dado que $\mathcal{A}(\ \mathrm{adj}\mathcal{A}) = |\mathcal{A}| \cdot \mathrm{Id}$, luego $|\mathrm{Adj}\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|^{n-1}$, de ello $|\mathcal{A}| = 0$.

Proposición 2.3 UNICIDAD

Si existe un único punto de ensilladura de K en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pertenece a $X_n \times Y_n$, si y sólo si, c_i y f_i tienen todos el mismo signo (cero con signo).

Demostración

El punto de ensilladura (x^0, y^0) tiene por coordenadas:

$$x_k^0 = \frac{f_{n-k+2}}{f_1 + \cdots + f_{n+1}}, \quad y_k^0 = \frac{c_{n-k+2}}{c_1 + \cdots + c_{n+1}} \quad \text{donde} \quad k = 1, 2, \dots, n+1.$$

Si todos los c_i y f_i tienen el mismo signo, es obvio que $0 \le x_i^0 \le 1$; $0 \le y_i^0 \le 1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^0 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f_{n-i+1}}{f_1 + \cdots + f_{n+1}} = 1; \quad \sum_{i=1}^{n+1} y_i^0 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_{n-i+2}}{c_1 + \cdots + c_{n+1}} = 1.$$

Recíprocamente, basta observar que si:

$0 \le x_i^0$ para $i = 1, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 \le 1$ debe suceder que:

$$\mathrm{sg}\ (f_{n-i+2}) = \ \mathrm{sg}\ \left(f_1 + \cdots + \hat{f}_{n-i+2} + \cdots f_{n+1}\right) \qquad \text{para} \quad i = 1, \dots, n.$$
$$|f_2 + f_3 + \cdots + f_{n+1}| \le |f_1 + f_2 + \cdots + f_{n+1}|,$$

de la desigualdad deducimos sg $(f_1) =$ sg $(f_2 + \cdots + f_{n+1})$. De las n igualdades deducimos sg $(f_i) =$ sg (f_j) $i, j = 2, \dots, n+1$. De las dos últimas expresiones resulta sg $(f_i) =$ sg $(f_2 + \cdots + f_{n+1}) =$ sg (f_1) para $i = 2, \dots, n+1$.

Del mismo modo se obtiene que todos los c_i deben tener el mismo signo; además los signos de f_i y c_i deben coincidir, al ser los respectivos sumatorios de f_i y c_i iguales a la suma de todos los elementos de la matriz $n-$asociada de $\mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{A}$ un juego matricial no cuadrado de orden $(m+1)*(n+1)$, cuyo campo escalar asociado es:

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \mathcal{A}_0 + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j y_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_{ij} x_i y_j$$

$$\mathcal{A}_0 = a_{m+1n+1}; \mathcal{A}_k = a_{kn+1} - a_{n+1n+1}; \mathcal{B}_\ell = a_{n+1\ell} - a_{n+1n+1}$$

$$k = 1, \ldots, m, \ \ell = 1, \ldots n$$

$$\mathcal{C}_{kj} = ((a_{kj} + a_{m+1n+1}) - (a_{kn+1} - a_{n+1j})) = \Delta \begin{pmatrix} k & n+1 \\ j & n+1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.4

Todo punto de ensilladura (x^0, y^0) de K contenido en $X_m \times Y_n$, está formado por estrategias óptimas y simples, es decir:

$$K(x, y^0) = K(x^0, y^0) = K(x^0, y) \quad \forall x \in X_m \quad \text{y} \quad \forall y \in Y_n.$$

Demostración

$$\begin{aligned} \Delta K_x &= K(x^0 + h, y^0) - K(x^0, y^0) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i h_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_{ij} h_i y_j^0 = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_{ij} y_j^0 \right) h_i = 0 \end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia de las condiciones de primer orden. De la misma forma $\Delta K_y = 0$.

Nota: Hemos utilizado la matriz asociada en lugar de la matriz adjunta, dado que ésta la tenemos definida incluso para matrices no necesariamente cuadradas, su utilización nos permite obtener información incluso cuando tratamos con juegos matriciales no cuadrados.

3. ESTRATEGIAS ÓPTIMAS SIMPLES

Vamos a caracterizar a las estrategias óptimas simples y obtendremos después una condición necesaria para encontrarlas, este último resultado junto con el teorema 2.4 nos permitirán establecer la equivalencia entre las estrategias óptimas simples y los puntos de ensilladura del ~~campo escalar asociado al~~ juego.

Lema 3.1

(x^0, y^0) es una estrategia óptima simple del juego, si y sólo si,

$$\forall i \in \Sigma_1 \; K(e_i, y^0) = K(x^0, y^0), \quad \forall j \in \Sigma_2 \; K(x^0, e_j) = K(x^0, y^0),$$

siendo $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ el 1 en el lugar $k-$ésimo.

Demostración

Sólo hay que ver la implicación recíproca, supongamos que $K(x^0, y^0) = K(x^0, e_j)$ $j = 1, 2, \ldots, n+1$.

$$\begin{aligned} K(x^0, y) &= x^0 \mathcal{A} y = \sum_{j=1}^{n+1} (x^0 \cdot C_j^t) y_j = (x^0 \mathcal{A}) \left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{n+1} y_j (x^0 \mathcal{A}) e_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} y_j (x^0 \mathcal{A} e_j) = \sum_{j=1}^{n+1} y_j K(x^0, e_j) = K(x^0, y^0) \end{aligned}$$

(Por C_j designamos a la columna $j-$ésima de la matriz).

Teorema 3.2

Toda estrategia óptima y simple puede obtenerse a partir del cálculo de los puntos de ensilladura del campo escalar K asociado al juego.

Demostración

Sea (x^0, y^0) una estrategia óptima simple, por el lema anterior x^0 será solución del sistema de $n+1$ ecuaciones y $m+1$ incógnitas siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{m+1} a_{i1} x_i = \sum_{i=1}^{m+1} a_{i2} x_i = \cdots = \sum_{i=1}^{m+1} a_{i,n+1} x_i \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m+1} x_j = 1 \end{array} \right.$$

y^0 será solución del sistema $m+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} a_{1j} y_j = \sum_{j=1}^{n+1} a_{2j} y_j = \cdots = \sum_{j=1}^{n+1} a_{m+1,j} y_j \\ \sum_{j=1}^{n+1} y_j = 1 \end{cases}$$

Si $n \neq m$ un sistema tiene más ecuaciones que incógnitas y el otro al revés. Generalmente el sistema no tendrá ninguna solución simple.

Despejando y_{n+1} en la última ecuación y sustituyendo su valor en la cadena de m igualdades, resulta: (igualamos cada una de las $n-1$ ecuaciones con la última).

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{kj} y_j - \sum_{j=1}^{n+1} a_{m+1j} y_j = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} (a_{kj} - a_{m+1j}) y_j = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} ((a_{kj} - a_{m+1j})\, y_j) + (a_{kn+1} - a_{m+1\,n+1}) \left(1 - \sum_{j=1}^{n} y_j\right) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

agrupando convenientemente:

$$\sum_{j=1}^{n} ((a_{kj} + a_{m+1\,n+1}) - (a_{m+1j} + a_{kn+1}))\, y_j = a_{m+1\,n+1} - a_{kn+1}$$

$$k = 1, 2, \ldots, m$$

equivalentemente:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_{kj} y_j = -\mathcal{A}_k \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

obteniendo uno de los dos sistemas que surgieron al calcular las condiciones de primer orden de la función K, ya sea en el caso matricial cuadrado ($m = n$) o no.

Análogamente de $K(e_i, y) = v$ para $i = 1, \ldots, n+1$, obtendríamos el otro sistema.

4. CÓMO ENCONTRAR TODAS LAS ESTRATEGIAS ÓPTIMAS DE UN JUEGO A PARTIR DE LOS PUNTOS DE ENSILLADURA DE UN CAMPO ESCALAR ASOCIADO

El objetivo en la presente sección es determinar un método para encontrar todas las soluciones, ~~de un juego bipersonal de suma cero~~, ~~calculando puntos~~ de ensilladura de campos escalares asociados.

Definición 4.1

Sea $\mathcal{A}$ un juego matricial cuadrado de orden $n+1$, no singular. Sea $K(x,y) = x\mathcal{A}y$ definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Con $x_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i \quad y_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i$

Denotamos por $E(\mathcal{A})$ el conjunto de puntos de ensilladura de la función K contenidos en $X_n \times Y_n$,

Teorema 4.2

Sea $\mathcal{A}$ una matriz de orden $(n+1)$ no singular y sea $\mathcal{B}_n$ la matriz $n-$asociada de $\mathcal{A}$. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{A}$ tenga una solución simple es que las cantidades f_i, c_j $i,j = 1,2,\ldots,n+1$ tengan el mismo signo. (considerando que si alguno de los f_i, c_j toman el valor cero, entonces se les asigna el signo adecuado). Además tal solución simple es:

$$x^0 = \frac{(f_{n+1}, f_n, \ldots, f_1)}{\sum_{i=1}^{n+1} f_i}; \quad y^0 = \frac{(c_{n+1}, c_n, \ldots, c_1)}{\sum_{i=1}^{n+1} c_i}$$

Demostración

Necesidad. Si $\mathcal{A}$ admite una solución simple (x^0, y^0) en $X \times Y$; es solución del sistema de ecuaciones lineal del lema 3.1 que por el teorema 3.2 tiene las mismas soluciones que el sistema que proporciona los puntos estacionarios de la función K. Luego (x^0, y^0) es de $E(\mathcal{A})$. Por ser $\mathcal{A}$ no singular por el apartado c) del teorema 2.2 $E(\mathcal{A}) = \{(x^0, y^0)\}$. Ello sólo es posible si la suma de los elementos de la matriz $n-$asociada de $\mathcal{A}$ es distinto de cero. Por la proposición 2.3 f_i, c_j tienen todos el mismo signo.

Suficiencia. Supongamos que f_i, c_j sean todos del mismo signo pero no todos nulos pues ello implicaría que $\mathcal{A}$ sería singular. (c teorema 2.2). De ello deducimos que:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \neq 0$$

por el teorema 2.2 apartado a) el sistema que proporciona los puntos estacionarios es compatible determinado. Sea (x, y) tal solución en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, por la proposición 2.3 admitiendo ahora coordenadas nulas, pertenece a $X_n \times Y_n$, al ser todos los f_i, c_j del mismo signo. Por el teorema 2.4 (x, y) es una solución simple. Además usando las relaciones:

$$x_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i; \quad y_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{obtenemos que:}$$

$$x^0 = \frac{(f_{n+1}, f_n, \ldots, f_1)}{\sum_{i=1}^{n+1} f_i} = x'; \qquad y^0 = \frac{(c_{n+1}, c_n, \ldots, c_1)}{\sum_{i=1}^{n+1} c_i} = y'$$

siendo única.

Corolario 4.3

Si una matriz cuadrada no singular admite estrategias óptimas simples, entonces las estrategias óptimas del juego son únicas.

Demostración

Toda solución simple satisface los dos sistemas de ecuaciones lineales del lema 3.1, si $\mathcal{A}$ es no singular existe un índice i tal que $f_i \neq 0$, dado que suponemos que la matriz cuadrada admite soluciones simples deducimos que la suma de los elementos de la matriz asociada es distinto de cero y además $\text{sg}(f_i) = \text{sg}(c_i)$ para todo i.

Estamos ya en condiciones de caracterizar las estrategias óptimas extremas para ambos jugadores (y por convexidad todas las estrategias óptimas). El teorema de *Shapley-Snow* ([2], Teorema 3.15, pág. 146), proporciona un método para encontrar todas las estrategias óptimas extremas a partir de las soluciones simples de submatrices regulares. Este teorema puede *reformularse* usando los resultados vistos que relacionan soluciones simples y puntos estacionarios del campo escalar asociado a cada submatriz regular $\mathcal{B}$ cuyo conjunto $E(\mathcal{B})$ es no vacío.

Teorema 4.4

Sea $\mathcal{J}$ un juego matricial de $\mathcal{A}$ de dimensiones $(m) \times (n)$ cuyo valor v sea distinto de cero. Entonces el conjunto de estrategias óptimas extremas para cada jugador es finito. Una estrategia óptima $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ es un punto extremo del conjunto de estrategias óptimas para el primer jugador, y una estrategia óptima $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ ~~es un punto extremo del conjunto de estrategias~~ del conjunto de estrategias óptimas para el segundo jugador, si y sólo si, $\mathcal{A}$ posee una submatriz cuadrada no singular $\mathcal{B}$ para la cual $(x_{\mathcal{B}}^0, y_{\mathcal{B}}^0)$ es punto de ensilladura del campo escalar asociado a $\mathcal{B}$ contenido en $X_n \times Y_n$, en donde $x_{\mathcal{B}}^0$ es el vector que se obtiene del x^0 eliminando aquellas componentes que correspondan a las filas eliminadas al obtener $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ y $y_{\mathcal{B}}^0$ es el vector que se obtiene del y^0 eliminando aquellas componentes que correspondan a las columnas eliminadas al obtener $\mathcal{B}$.

Ejemplo 4.5

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}$ es no singular y el campo escalar asociado a $\mathcal{A}$ es:

$$K(x_1, x_2, y_1, y_2) = 1 + x_1 - x_2 + y_1 - y_2 - 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$$

El único punto estacionario de K es: $(3/7, 1/7, 5/7, 3/7)$ no contenido en $X_2 \times Y_2$.

Buscamos ahora submatrices de orden 2 no singulares y no estrictamente determinadas:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El campo escalar asociado a $\mathcal{B}$ es:

$$k(x, y) = 2x + 2y - 3xy;$$

siendo el único punto estacionario $(x, y) = (2/3, 2/3)$ que pertenece a $X_1 \times Y_1$; $v = 4/3$. Veamos ahora si es óptima: Es suficiente con ver que

$$(2/3, 0, 1/3)\mathcal{A}(0, 0, 1)^t \geq 4/3. \quad (4/3, 4/3, 5/3)(0, 0, 1)^t = 5/3.$$

Y que:

$$(0, 1, 0)\mathcal{A}(2/3, 1/3, 0)^t \leq 4/3. \quad (0, 3, 0)(2/3, 1/3, 0)^t = 1.$$

Luego el par $\{(2/3, 0, 1/3); (2/3, 1/3, 0)\}$ son estrategias óptimas para cada jugador.

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El campo escalar asociado a $\mathcal{B}$ es:

$$k(x, y) = 1 + x + y - 2xy;$$

siendo el único punto estacionario: $(x, y) = (1/2, 1/2)$ que pertenece a $X_1 \times Y_1$, $v = 3/2$.

$$(1/2, 0, 1/2)\mathcal{A}(0, 1, 0)^t = (3/2, 1, 3/2)(0, 1, 0)^t = 1 < 4/3.$$

Luego el par $\{(1/2, 0, 1/2); (1/2, 0, 1/2)\}$ no es óptima.

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El campo escalar asociado a $\mathcal{B}$ es:

$$k(x, y) = 3x + 2y - 5xy$$

El único punto estacionario que pertenece a $X_1 \times Y_1$ es $(2/5,\ 3/5)$, $v = 6/5$.

$$(0, 2/5, 3/5)\mathcal{A}(0, 1, 0)^t = 3/5 < 4/3.$$

Luego el par $\{(0, 2/5, 3/5); (2/5, 3/5, 0)\}$ no es óptima.

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El campo escalar asociado a $\mathcal{B}$ es:

$$k(x, y) = 1 - x - y + 4xy$$

El único punto estacionario que pertenece a $X_1 \times Y_1$ es $(1/4,\ 1/4)$, $v = 3/4$.

$$(0, 1/4, 3/4)\mathcal{A}(1, 0, 0)^t = (6/4, 3/4, 3/4)(1, 0, 0)^t = 3/2 > 4/3.$$

$$(1, 0, 0)\mathcal{A}(0, 1/4, 3/4)^t = (1, 2, 2)(0, 1/4, 3/4)^t = 2 > 4/3.$$

Luego el par $\{(2/3, 0, 1/3); (2/3, 1/3, 0)\}$ no es una estrategia óptima.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] **Gantmacher, F.R.** (1966). *Théorie des Matrices.* Dunod. París.
[2] **Jones, A.J.** (1980). *Game Theory. Mathematical models of conflict.* England.
[3] **Luce, R.D.** and **Raiffa, H.** (1957). *Games and Decisions.* New York. Wiley.
[4] **Moulin, H.** (1979). *Fondation de la Théorie des Jeux.* París. Hermann.
[5] **Owen, G.** (1982). *Game Theory.* New York. Academic Press.
[6] **Von Neumann, J.** and **Morgeenstern, O.** (1944). *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton U. Press.

ENGLISH SUMMARY:

OPTIMAL STRATEGIES FOR A TWO-PERSON ZERO SUM GAME AND SADDLE-POINTS OF THE SCALAR FIELD ASSOCIATED WITH THE GAME

J. Freixas Bosch

In a two-person zero sum game defined in normal form for a $m \times n$ matrix $\mathcal{A}$, we may define the mixed extension given by a bilinear function, whose domain is the cartesian product of the corresponding simplexes and is therefore included in $\mathbb{R}^{m+n}$. The Von Neuman or Minimax theorem [1] establishes the existence of at least a couple of optimal strategies.

In this article we introduce the concept of the scalar field associated with the matrix game that it is defined in a set included in $\mathbb{R}^{m-1+n-1}$, since we omit the last component of every corresponding probability vector.

First of all we study the existence and uniqueness of the saddle points of the scalar field associated with a square matrix game, and we obtain the general form of the solution when this is unique. We will prove that in this kind of scalar field any stationary point is a saddle point. This fact will simplify later calculations considerably.

The relation between the stationary points and the optimal strategies becomes clear when we prove that in any matrix game there is an equivalence between the stationary points of the scalar field and optimal simple strategies.

The Shapley-Snow theorem [2] provides a systematic procedure to characterize all the optimal strategies just by finding the simple optimal strategies for each regular square submatrix~~, and from here we can find all optimal~~ strategies by forming all convex combinations of the extreme optimal strategies, and obtaining a polyhedric set.

We can obtain all the optimal strategies for a game from stationary points for each scalar field associated with each regular submatrix.

It is important to note that we have used the n−associated matrix instead of the adjoint matrix, since it is also defined for a matrix not square giving in this case information, which we would not have if only the adjoint matrix was used.

1. INTRODUCTION

First we will define the scalar field associated with a two person zero sum game.

Then we introduce the notation that we will use and we will go over the fundamental concepts which we will use.

2. SADDLE-POINTS OF THE SCALAR FIELD ASSOCIATED

We will relate the concept of saddle-point for a scalar field with the concept of saddle point used in game theory.

We will then demostrate that all simple saddle points of the associated scalar field give simple optimal strategies.

3. SIMPLE OPTIMAL STRATEGIES

We will then demonstrate the opposite implication, which will therefore establish the equivalence of the two concepts.

4. HOW TO FIND ALL OPTIMAL STRATEGIES OF A GAME FROM THE SADDLE-POINTS OF THE ASSOCIATED SCALAR FIELD

We will propose a method based on calculations of saddle points of the scalar field which allow us to find all the optimal strategies of the game. It is sufficient to use the equivalence shown in section 3 and to use the Shapley-Snow theorem.