QÜESTIIÓ, Vol 20, 2 pp. 223-238, 1996

INTERPRETACIÓN DE LOS PRECIOS SOMBRA EN PRESENCIA DE DEGENERACIÓN

TERESA LEÓN* y VICENTE LIERN†

Universitat de València

El propósito de nuestro trabajo es analizar la interpretación económica de las variables duales como «precios sombra» cuando la solución posible básica óptima del problema de programación lineal es degenerada. Resolvemos algunos ejemplos que ilustran esta interpretación usando el programa LINDO. Finalmente planteamos una modificación a la propuesta de Gal (1986) para llevar a cabo el análisis de sensibilidad en presencia de degeneración.

An interpretation of the shadow prices under degeneracy

Keywords: Precios Sombra, Programación Lineal, Simplex Paramétrico.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de la Investigación Operativa en las Facultades o Escuelas de Ciencias Económicas y Empresariales es capacitar al futuro titulado para resolver problemas reales en el ámbito de la empresa. Sin embargo, los ejemplos que manejamos en las aulas, suelen adolecer de un excesivo academicismo, que si bien resulta útil para la comprensión, puede ser engañoso por ignorar situaciones que en la práctica son habituales. En este sentido, nos parece interesante partir de una situación que en las clases «nos conviene» evitar cuando hacemos análisis de la sensibilidad: **las soluciones óptimas degeneradas**.

* Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universitat de València. Doctor Moliner, 50. 46100-Burjassot (València). Tel: (6) 386 43 54. Fax: (6) 386 47 35.

† Dep. Economía Financiera y Matemática. Artes Gráficas 29. Universitat de València. 46010 València. Tel: (6) 386 40 50, Fax: (6) 386 43 64, **E-mail:** `Vicente.Liern` **at** `uv.es`

– Article rebut l'abril de 1995.

– Acceptat el juny de 1996.

Las técnicas del análisis de sensibilidad convierten el modelo de Programación Lineal en una herramienta útil para la planificación de problemas reales. En numerosas ocasiones, cuando se formula un problema real como uno de programación lineal, tanto los coeficientes de la matriz de restricciones como los de la función y los términos independientes son estimaciones basadas en la experiencia actual y en la predicción de condiciones futuras. Sin embargo, es frecuente que, para llevar a cabo estas estimaciones, se manejen datos recogidos de forma poco rigurosa. Por tanto, es razonable mantener ciertas dudas respecto a la interpretación de los resultados obtenidos al optimizar, y antes de convertir una solución óptima en una política de actuación, deberá comprobarse que su comportamiento sigue siendo bueno para otras representaciones plausibles del problema real.

El análisis de sensibilidad permite, entre otras cosas, evaluar el impacto de la inclusión de nuevos productos en un plan de producción o determinar el precio, a partir del cual, un producto cuya fabricación no resultaba interesante pasa a ser competitivo.

En particular, las soluciones óptimas del problema dual del modelo lineal que se ha construido, suelen utilizarse para predecir la variación que se produciría en el valor de la función objetivo si se aumenta o disminuye el término independiente de una restricción. Por ejemplo, si nos centramos en un problema de maximización de beneficios sujeto a restricciones de capacidad o limitación de recursos, se utilizaría para determinar el aumento en los beneficios que se produciría al conseguir recursos adicionales que se han agotado al diseñar la política de producción óptima.

La idea fundamental de este trabajo es remarcar la diferencia que existe en la interpretación del análisis de sensibilidad de los términos independientes y de las variables duales cuando la solución posible básica (SPB) óptima del modelo lineal es degenerada y cuando no lo es. Una cuestión a tener en cuenta es que de la lectura de los listados de las soluciones que proporcionan la mayoría de paquetes comerciales, no se desprende, a simple vista, si estamos ante una SPB óptima degenerada o no. Además, debido a que el análisis más conocido y directo es el que puede hacerse en el caso no degenerado, es fácil comprender que se han producido errores de interpretación en algunas situaciones reales (véase Rubin y Wagner (1990)).

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea (P) el problema lineal

$$(P)\quad \begin{array}{ll} Max & CX \\ \text{s.a} & A_0X \leq b \\ & X \geq 0_n \end{array}$$

donde C es un vector fila, A_o es una matriz $m \times n$ y b un vector columna fijos, y $X \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables del problema.

Introduciendo variables de holgura $h_j \geq 0$, $1 \leq j \leq m$, (P) puede escribirse en forma stándard (P') como sigue:

$$\begin{array}{lll} \text{(P')} & Max & cx \\ & \text{s. a} & Ax = b \\ & & x \geq 0_{n+m} \end{array}$$

donde $c = (C, 0_m)$, $A = (A_o, I_m)$, $x = \begin{pmatrix} X \\ h \end{pmatrix}$.

Sea $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ una solución posible básica de (P'). Se dice que $\bar{x}$ es ***degenerada*** si existe alguna variable básica x_{B_j} de modo que $\bar{x}_{B_j} = 0$. En este caso existen $\{B_1, ...B_k\}$ submatrices invertibles $m \times m$ de la matriz de restricciones A tales que $B_j\bar{x} = b$ para $1 \leq j \leq k$.

El problema dual de (P) que representaremos por (D) es

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & Min & wb \\ & \text{s. a} & wA_o \geq C \\ & & w \geq 0_m^T \end{array}$$

que por supuesto es equivalente a (D'), el dual de (P')

$$\begin{array}{lll} \text{(D')} & Min & wb \\ & \text{s. a} & wA \geq c. \end{array}$$

Una base B de (P') es ***dual posible*** si $w = c_B B^{-1} A$ es una solución posible de (D').

- Si la SPB óptima de (P'), x^* es no degenerada, tiene asociada una única base dual posible, y por tanto, una única solución óptima dual $w^* = (w_1^*, .., w_m^*)$. Cada w_i^* se interpreta como el índice de aumento (res. de disminución) del valor de la función objetivo en el óptimo si el término independiente de la restricción i–ésima, b_i, se incrementa (resp. se disminuye). De aquí que, en el contexto del análisis de sensibilidad a las variables duales se les llame «precios sombra», «precios duales» o «valores marginales».

- Por el contrario, si la SPB óptima de (P'), x^* es degenerada puede tener más de una solución óptima dual asociada. Entonces, ¿qué interpretación económica debemos dar a las variables duales?

3. INTERPRETACIÓN DE LAS VARIABLES DUALES EN PRESENCIA DE DEGENERACIÓN

Supongamos que x^* es una SPB óptima degenerada del problema primal y $w^* = (w_1^*, ..., w_m^*)$ es solución óptima del dual (D), vamos a ver que w_i^* es una cota superior del aumento de la función objetivo si aumenta en una unidad el recurso i–ésimo, y una cota inferior a la disminución del valor de la función objetivo si disminuye en una unidad el recurso i–ésimo. Para ello vamos a considerar un resultado más general cuya demostración puede hacerse, por ejemplo, siguiendo a Shapiro (1984).

Recordemos que si $v(b) = \text{Max } \{CX \mid \ A_oX \leq b, \quad X \geq 0\}$ denota el coste máximo del problema primal como función de b, entonces $v(.)$ es cóncava en $\mathbb{R}^m$.

Dado $b_o \in \mathbb{R}^n$ de modo que $v(b_o)$ es finito, una dirección $d \neq 0_m$ diremos que es una ***dirección posible*** si existe $\theta^* \geq 0$ de manera que $v(b_o + \theta d)$ es finito para cualquier $\theta \in [0, \theta^*]$.

Entonces, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1

Supongamos que $v(b_o)$ es finito y que $d \neq 0$ es una dirección posible de $v(.)$ en b_o. Entonces, la derivada direccional de $v(.)$ en b_o en la dirección de d existe y viene dada por

$$\nabla v(b_o; d) = Min\{w^*d \mid w^* \text{ es solución óptima de} (D_o)\},$$

donde D_o es el dual del problema primal (P) cuando $b = b_o$.

Este resultado tiene unas consecuencias inmediatas muy apropiadas para nuestra intención:

a) Si el conjunto de soluciones óptimas de D_o se reduce a un único vector w^* entonces $\nabla v(b_o; d) = w^*d$ para cualquier dirección posible d.

b) Si además el conjunto de direcciones posibles es $\mathbb{R}^m - \{0_m\}$, entonces $v(.)$ es diferenciable y $\dfrac{\partial v}{\partial b_i}(b_o) = w_i^*$ y obtenemos ***los precios sombra.***

c) Si (D_o) tiene más de una solución óptima,

$$\nabla v(b_o; e_i) = Min\{w_i^* \mid w^* = (w_1^*, ..., w_m^*) \text{ es solución óptima de} (D_o)\}.$$

Entonces, dado un problema de la forma $(P)\textbf{Max}\{CX \mid \ A_oX \leq b, \quad X \geq 0\}$, para hallar el aumento en el valor de la función objetivo que se produciría si b_i aumenta una unidad tendríamos que hallar el

$$Min\{w_i^* \mid w^* \text{ es solución básica óptima de} (D)\}$$

y por tanto cada w_i^* sería una cota superior para ese aumento. Siempre y cuando e_i (resp. $-e_i$) sea una dirección posible, es decir que el problema resultante de aumentar una cantidad positiva (resp. negativa) el término independiente b_i no sea imposible.

Por consiguiente, si hay más de una solución dual óptima, será posible definir dos precios sombra $p_i^+ = \nabla v(b_o; e_i)$ y $p_i^- = \nabla v(b_o; -e_i)$, y se tendrá que

$$\begin{array}{llll} (1) & p_i^+ & = & \text{Min}\{w_i^* \mid w^* = (w_1^*, ..., w_m^*) \text{ es solución básica óptima de (D)}\}. \\ (2) & p_i^- & = & \text{Max}\{w_i^* \mid w^* = (w_1^*, ..., w_m^*) \text{ es solución básica óptima de (D)}\}. \end{array}$$

Veámoslo con un ejemplo.

(P_1) $\mathbf{Max}\, 3x_1 + 4x_2$

Sujeto a

$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima de (P_1) es

$$(3) \qquad x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_7^*)^T = (3, 4, 0, 0, 0, 0, 8)^T, \qquad z^* = 25,$$

siendo x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 las variables de holgura.

Y las soluciones básicas óptimas del dual son

$$(4) \qquad \begin{array}{lcl} w^1 & = & (0, 0, 1, 1, 0) \\ w^2 & = & (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{5}{2}, 0) \\ w^3 & = & (1, 1, 0, 0, 0) \\ w^4 & = & (0, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, 0, 0). \end{array}$$

Los precios sombra pueden ser calculados según (1), (2) obteniéndose:

$$(5) \qquad p_1^+ = 0, p_2^+ = 0, p_3^+ = 0, p_4^+ = 0, p_5^+ = 0,$$

$$(6) \qquad p_1^- = 1, p_2^- = 1, p_3^- = \frac{5}{4}, p_4^- = \frac{5}{2}, p_5^- = 0.$$

Los paquetes de Programación Lineal hallan ***una*** de estas soluciones y en general no suelen avisar de que ***existen otras***. En particular, si para resolver (P_1) utilizamos el paquete LINDO encontramos w^3 (véase el Apéndice 1).

Pese a que el listado no diferencia las variables básicas de las no básicas, se puede reconocer que la solución óptima de (P_1) es degenerada porque al leer el listado de los rangos en los que la base no cambia, al variar un término independiente, se observa, por ejemplo, que no es posible disminuir $b_3 = 18$.

En general, al resolver el problema (P') se encontrará una de las dos situaciones siguientes:

- Si la SPB óptima de (P') es no degenerada, entonces para cada $b_r \quad 1 \leq r \leq m$ existe un intervalo $\Lambda_r = [\underline{\lambda}_r, \overline{\lambda}_r]$ con $\underline{\lambda}_r < 0$, $\overline{\lambda}_r > 0$ de modo que si el r–ésimo término independiente es $b_r + \lambda_r$ con $\lambda_r \in \Lambda_r$, la base óptima continúa siéndolo. Además, la función valor óptimo es de la forma

$$z^*(\lambda_r) = a + p\lambda_r, \qquad \lambda_r \in \Lambda_r,$$

  por lo que $p_r^+ = p_r^- = p$.

- Si la SPB óptima de (P') es degenerada, alguno de los extremos del rango en que es posible variar b_r, sin que cambie la base, es 0. Esto es debido a que la función valor óptimo es de la forma

$$z^*(\lambda_r) = \begin{cases} a + p_r^-\lambda_r & \lambda_r \in [\lambda_{1r}, 0] \\ a + p_r^+\lambda_r & \lambda_r \in [0, \lambda_{2r}] \end{cases}$$

donde $\lambda_{1r} \leq 0, \quad \lambda_{2r} > 0$.

Como se ha partido de un problema (P) de maximización con restricciones de «menor o igual», cuando b_r sobrepase un cierto valor, $p_r^+ = 0$ y $\lambda_{2r} = +\infty$. Por el contrario, si hacemos disminuir demasiado b_r, el problema pasa a ser imposible.

La discusión para un PL de minimización con restricciones de «mayor o igual» sería simétrica.

4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El ejemplo anterior, por ser sencillo, permitía generar todas las soluciones duales óptimas. Sin embargo, no será posible utilizar este procedimiento para calcular los precios sombra de problemas más complejos.

En el caso general, para calcular p_i^+ y p_i^- proponemos la utilización del Simplex Paramétrico (véase Murty (1983)) que resuelve problemas en los que los términos independientes están en función de un parámetro λ, es decir

$$(7) \qquad \text{Max}\{cx \mid Ax = b + \lambda b^*, \quad x \geq 0\},$$

donde $b, b^* \in \mathbb{R}^m$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Haciendo uso de este algoritmo se calculan p_i^+ y p_i^- considerando $b^* = e_i$ y $b^* = -e_i$ respectivamente. En el Apéndice 2 mostramos su utilidad para el ejemplo (P_1).

Visto que la información que proporcionan las variables duales es diferente, cabe preguntarse por la interpretación económica del análisis de sensibilidad en presencia de degeneración. Si la solución posible básica óptima x^* tiene más de una base óptima, ¿qué sentido económico tiene hallar los rangos para los términos independientes en los que la base actual sigue siendo óptima?

Supongamos que estamos interesados concretamente en la restricción r–ésima, es decir b_r, y sea $\tilde{B}$ el conjunto

$$(8) \qquad \tilde{B} = \{B_j : B_j \text{ es una base óptima asociada a } x^*, \quad 1 \leq j \leq k\}.$$

Para cada B_j podemos determinar

$$(9) \qquad \Lambda_r^{(j)} = \{\lambda_r \in \mathbb{R} : x_i^{(j)}(\lambda_r) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n\} = [\underline{\lambda}_r^{(j)}, \overline{\lambda}_r^{(j)}],$$

donde $x_i^{(j)}(\lambda_r)$ representa la componente i–ésima de $x^{(j)}(\lambda_r)$ que es la solución óptima parametrizada considerando como base óptima B_j.

Para hacer el análisis de sensibilidad con respecto a b_r, Gal (1986) propone determinar la ***región crítica global*** $\Lambda_r = \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_r^{(j)}$ de manera que para todo $\lambda_r \in \Lambda_r$, al menos una base B_j permanezca óptima.

Esta propuesta es adecuada pero con ella se perderá información si no se especifica para cada base dual posible la solución óptima parametrizada. Nosotros añadimos que debería determinarse el comportamiento de la solución en cada intervalo $\Lambda_r^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$. Veámoslo en el siguiente ejemplo:

(P_2) $\mathbf{Max}\, x_1 + x_2$

Sujeto a

$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima de (P_2) es $x^{*T} = (x_1^*, \ldots, x_5^*)^T = (3,4,0,0,0)^T$, donde x_3, x_4, x_5 son variables de holgura. Tiene tres bases asociadas, una que no es dual posible $B_1 = (a_2, a_1, a_3)$ y dos que son ***duales posibles***

$$B_2 = (a_4, a_1, a_2), \quad B_3 = (a_5, a_1, a_2). \tag{10}$$

- Si estamos interesados en la variación de b_1, es decir $b_1 + \lambda_1$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, se obtienen los siguientes resultados:

Para la base B_2:

$$\begin{pmatrix} x_1^*(\lambda_1) \\ x_2^*(\lambda_1) \\ x_3^*(\lambda_1) \\ x_4^*(\lambda_1) \\ x_5^*(\lambda_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 0 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $z^*(\lambda_1) = 7 + 1/5\lambda_1$, $p_1^+ = 1/5$ y el parámetro λ_1 debe estar en $\lambda_1 \in [0, 15]$.

Para la base B_3:

$$\begin{pmatrix} x_1^*(\lambda_1) \\ x_2^*(\lambda_1) \\ x_3^*(\lambda_1) \\ x_4^*(\lambda_1) \\ x_5^*(\lambda_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Entonces $z^*(\lambda_1) = 7 + 1/3\lambda_1$, $p_1^- = 1/3$ y el parámetro λ_1 debe estar en $\lambda_1 \in [-12, 0]$.

La región crítica global propuesta por Gal sería $\lambda_1 \in [-12, 15]$. Sin embargo, es evidente que la solución óptima depende de λ_1 de diferente forma si $\lambda_1 \in [0, 15]$ o si $\lambda_1 \in [-12, 0]$.

- El análisis de la variación de los otros dos términos independientes sería análogo.

En la práctica, si utilizamos el paquete LINDO, podemos obtener los precios sombra y sus rangos de validez haciendo uso del mandato «PARA».

Por último, creemos necesario hacer una breve mención a la ***redundancia***, como causa de degeneración. La redundancia puede aparecer en cualquiera de las fases de modelización.

Por ejemplo, en el análisis de postoptimalidad, cambiar los términos independientes de un problema lineal puede convertir en redundante a una restricción que no lo era y viceversa. Sin embargo, estas restricciones redundantes, que pueden influir en los precios sombra, no deben omitirse puesto que podría dar lugar a interpretaciones erróneas.

5. CONCLUSIONES

Al llevar a cabo el análisis de sensibilidad de los términos independientes de un problema de programación lineal a partir del listado obtenido mediante un paquete informático, aparecen bajo la denominación de «dual prices» o «shadow prices» unas variables cuya interpretación varía según el carácter degenerado o no degenerado de la solución posible básica óptima obtenida. Por tanto, es imprescindible distinguir ante qué tipo de solución óptima nos hallamos.

En el caso no degenerado, los «dual prices» indican la conveniencia o no de adquirir una cantidad adicional de un recurso que se agota y a qué precio. Sin embargo, si la solución es degenerada, esta interpretación no es válida, y lo que proporcionan es una estimación arriesgada de los beneficios esperados al adquirir unidades extra del recurso. En este segundo caso aconsejamos que el análisis de sensibilidad se lleve a cabo según se expone en el epígrafe 4.

APÉNDICE 1: SOLUCIÓN DE P_1

Si resolvemos el problema P_1 con el paquete de programación lineal LINDO se obtiene lo siguiente:

```
MAX      3 X1 + 4 X2
SUBJECT TO
       2)    X1 + 3 X2 <=    15
       3)    2 X1 + X2 <=    10
       4)    2 X1 + 3 X2 <=    18
       5)    X1 + X2 <=    7
       6)    4 X1 + 5 X2 <=    40
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP       2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      25.0000000

 VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
       X1          3.000000           .000000
       X2          4.000000           .000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
       2)           .000000          1.000000
       3)           .000000          1.000000
       4)           .000000           .000000
       5)           .000000           .000000
       6)          8.000000           .000000

NO. ITERATIONS=        2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                              OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE          CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    COEF          INCREASE         DECREASE
      X1          3.000000        5.000000         1.666667
      X2          4.000000        5.000000         2.500000

                              RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW          CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS           INCREASE         DECREASE
       2         15.000000         .000000        10.000000
       3         10.000000         .000000         5.000000
       4         18.000000        INFINITY          .000000
       5          7.000000        INFINITY          .000000
       6         40.000000        INFINITY         8.000000
```

APÉNDICE 2: USO DEL SIMPLEX PARAMÉTRICO

Partimos de una tabla óptima del problema original (P) (nótese que podemos haber obtenido cualquiera de las tablas óptimas asociadas a la solución óptima primal degenerada), por tanto los costes reducidos $z_j - c_j$ son no negativos:

Base	$\overline{b}$	$x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, x_n$
x_B	$B^{-1}b$	$Y = B^{-1}A$
	$c_B\overline{b}$	$c_B B^{-1}A - c$

(T_1)

donde hemos escrito los vectores columna

$$Y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \ldots \\ y_{mj} \end{pmatrix} = B^{-1}a_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

siendo a_j la columna j–ésima de A.

Si consideramos el vector de términos independientes parametrizado por $\lambda \in \mathbb{R}^+$, se tiene $b' = b + \lambda b^*$. Multiplicando por B^{-1} se obtendrá:

$$B^{-1}b' = B^{-1}b + \lambda B^{-1}b^*,$$

que denotaremos por

$$\overline{b}' = \overline{b} + \lambda \overline{b}^*.$$

La nueva tabla será la siguiente:

Base	$\overline{b}$	$\overline{b}^*$	$x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, x_n$
x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}b^*$	$Y = B^{-1}A$
	$c_B\overline{b}$	$c_B\overline{b}^*$	$c_B B^{-1}A - c$

(T_2)

T_2 será óptima mientras continúe siendo primal posible o equivalentemente mientras que $\overline{b}_i + \lambda \overline{b}_i^*$ sea no negativo para $1 \leq i \leq n$, y esto ocurre si y sólo si $\lambda \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$, donde

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \overline{b}_i^* \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m \\ \text{Max}\{-\overline{b}_i/\overline{b}_i^* : \quad \overline{b}_i^* > 0\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\overline{\lambda} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \overline{b}_i^* \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m \\ \text{Min}\{-\overline{b}_i/\overline{b}_i^* : \quad \overline{b}_i^* < 0\} & \text{si} \exists i | \quad \overline{b}_i^* < 0 \end{cases}$$

Cuando $\lambda \notin [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ se actualizará la tabla mediante el dual del simplex.

En el ejemplo (P_1) una de las tablas óptimas del problema es

Base	$\overline{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	4	0	1	0	0	1	−2	0
x_4	0	0	0	0	1	1	−4	0
x_1	3	1	0	0	0	−1	3	0
x_3	0	0	0	1	0	−2	3	0
x_7	8	0	0	0	0	−1	−2	1
	25	0	0	0	0	1	1	0

(T_3)

Vamos a calcular por ejemplo p_3^-. Para ello debemos hacer $b^* = -e_3$, entonces se tiene

$$b_3' = 18 - \lambda_3, \quad \lambda_3 > 0$$

La tabla sería la siguiente:

Base	$\overline{b}$	$\overline{b}^*$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	4	−1	0	1	0	0	1	−2	0
x_4	0	−1	0	0	0	1	1	−4	0
x_1	3	1	1	0	0	0	−1	3	0
x_3	0	2	0	0	1	0	−2	3	0
x_7	8	1	0	0	0	0	−1	−2	1
	25	−1	0	0	0	0	1	1	0
x_2	4	−1/2	0	1	0	−1/2	1/2	0	0
x_6	0	1/4	0	0	0	−1/4	−1/4	1	0
x_1	3	1/4	1	0	0	3/4	−1/4	0	0
x_3	0	5/4	0	0	1	3/4	−5/4	0	0
x_7	8	3/2	0	0	0	−1/2	−3/2	0	1
	25	−5/4	0	0	0	1/4	5/4	0	0

(T_4)

De donde directamente se obtiene que

$$\begin{pmatrix} x_1^*(\lambda_3) \\ x_2^*(\lambda_3) \\ x_3^*(\lambda_3) \\ x_6^*(\lambda_3) \\ x_7^*(\lambda_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 5/4 \\ 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \text{ es solución para } \lambda_3 \in [0,8].$$

La función objetivo en función de λ_3 será

$$z(\lambda_3) = 25 - 5/4\lambda_3,$$

y por tanto

$$p_3^- = 5/4,$$

que, desde luego, coincide con el dado en (6).

Operando de igual forma con los restantes e_i se obtendrían todos los precios sombra.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **Gal, T.** (1986). «Shadow Prices and Sensivity Analysis in Linear Programming under Degeneracy». *OR Spectrum*, **8**, 59–71.

[2] **Karwan, M.H.**, **Lotfi, V.**, **Telgen, J.** y **Zionts, S.** (1983). *Redundancy in Mathematical Programming*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer–Verlag. Berlin.

[3] **Murty, K.G.** (1983). *Linear Programming*. John Wiley and sons. New York.

[4] **Rubin, D.S.** y **Wagner, M.H.** (1990). «Shadow Prices: Tips and Traps for Managers and Instructors». *Interfaces*, **20**, 150–157.

[5] **Shapiro, J.F.** (1979). *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*. John Wiley and sons. New York.

[6] **Shapiro, R.D.** (1984). *Optimization Models for Planning and Allocation: Text and Cases in Mathematical Programming*. John Wiley and sons.

[7] **Schrage, L.** (1989). *Linear, Integer and Quadratic Programming with LINDO. User's Manual*. (3ª edición). The Scientific Press. San Francisco.

ENGLISH SUMMARY:

AN INTERPRETATION OF THE SHADOW PRICES UNDER DEGENERACY

Teresa León y Vicente Liern

1. INTRODUCTION

For practical purposes, knowing the behaviour of the solution of the linear programming program due to changes in the data is as important as obtaining the optimal solution itself.

The main goal of this paper is to remark the difference between the sensivity analysis of the right hand side coefficients and the interpretation of the dual variables when the optimal basic feasible solutions are degenerate and when they are not. Moreover, as the best known and direct analysis is for the nondegenerate case, one could be tempted to use it also for the degenerate case.

2. STATEMENT OF THE PROBLEM

Let (P) be the linear program **max** $\{CX : A_o X \leq b, X \geq 0_n\}$ where $C \in \mathbb{R}^n$, $A_o \in M_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ are parameters and $X \in \mathbb{R}^n$ is the decisions vector. Its dual problem can be stated as **min** $\{wb : wA_o \geq b, w \geq 0_m^T\}$, and we denote by (P') the standard form of (P).

Let $\bar{x} = (x_B, x_N)^T = (B^{-1}b, 0_N)^T$ be a basic feasible solution (BFS) of (P'), $\bar{x}$ is degenerate if less than m of its components are greater than zero. A basis, B, is dual feasible if $w = c_B B^{-1} A$ is a feasible solution of the dual problem.

Let x^* be the optimal BFS of (P'), then we have that

- If x^* is non degenerate, then it has only one dual feasible basis associated and therefore only one optimal dual solution w^*. Every w_i^* can be seen as the rate of increasing or decreasing of the objective function by unit of b_i. And from the point of view of the economic interpretation of the dual variables they are called shadow prices, dual prices or marginal values.

- If x^* is degenerate it could have more than one dual optimal solution associated. Then, how should we interpret the dual variables?

3. INTERPRETATION OF THE DUAL VARIABLES UNDER DEGENERACY

Let x^* be a degenerate optimal BFS of (P') and $w^* = (w_1^*, w_2^*, \ldots, w_m^*)$ an optimal solution of its dual, then w_i^* is an upper bound on the objective function value increase when b_i increases by one unit and a lower bound on the objective function decrease when b_i decreases by one unit.

Then, for a problem of maximization of benefits subject to capacity constraints if we want to compute the benefits increase when an extra unit of the i–th resource is obtained then we should find **min** $\{ w_i^* : w^* \text{ optimal solution of (D)} \}$.

Analogously, for the case that we have $b_i - 1$ units of the i–th resource (and the problem still remains feasible) we find **max** $\{ w_i^* : w^* \text{ optimal solution of (D)} \}$. Thus we must consider two «shadow prices» p_i^+ and p_i^-.

The sensivity analysis performed by most commercial packages returns for each of the constraints a dual solution and for each of the coefficients in the objective function and for each of the right hand side coefficients of the constraints a certain validity interval.

The point is that in general these packages do not include a message saying that more than one optimal dual solution exists when it is the case and we could make fallatious interpretations of their outputs.

However, we can recongnize this situation by a simple examination. If the optimal BFS of (P') is degenerate at least one of the interval limits is zero. This is so because the objective function value is of the following form:

$$z^*(\lambda_r) = \begin{cases} a + p_r^- \lambda_r & \lambda_r \in [\lambda_{1r}, 0] \\ \\ a + p_r^+ \lambda_r & \lambda_r \in [0, \lambda_{2r}] \end{cases}$$

4. SENSIVITY ANALYSIS

In order to compute p_i^+, p_i^- and also the validity ranges we can use the parametric simplex algorithm for programs in which the right hand side coefficients depend on a parameter: **max** $\{CX : A_o X = b + \lambda b^*, X \geq 0_n\}$ where $b, b' \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

We obtain the required information by taking $b^* = e_i$ where $e_i = (0, .., 1, ..0)^T$ and $b^* = -e_i$ for every $i = 1, 2, \ldots, m$.

In practice, if we use for instance the LINDO package to solve our linear programming problem we do it by the command «PARA».

5. CONCLUSIONS

If the optimal BFS of the problem **max** $\{CX : A_o X \leq b, X \geq 0_n\}$ is nondegenerate, the dual prices indicate the usefulness of purchasing an extra amount of a binding resource. However, under degeneracy this interpretation could be non valid and what «dual prices» would provide is a risky estimation of the expected benefits when extra resources are acquired.